МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

IV-V

СБОРНИК ПОДГОТОВИЛИ:
Э. Винберг, Е. Дынкин, С. Молчанов, А. Шершевский, И Яглом.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1965

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я Ш К О Л А

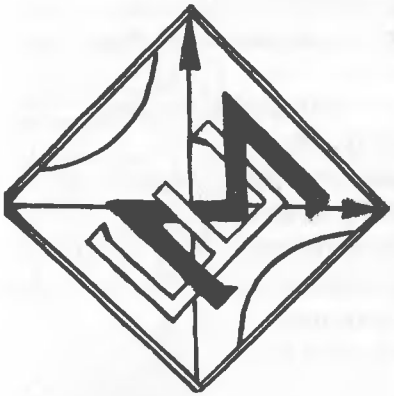
ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

IУ - У

2595

Сборник подготовили: Э.Винберг, Е.Дынкин, С.Молчанов,
А.Шершевский, И.Яглом.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965



В ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

При механико-математическом факультете МГУ работает Вечерняя математическая школа для учащихся 7-II классов. В работе ВМШ могут участвовать все школьники, интересующиеся математикой. Включиться в работу можно и в середине учебного года. Вход на все занятия свободный.

В ноябре 1965 года в ВМШ были прочитаны следующие лекции:

Для 8-х классов: профессор В.А.Ефремович, Наглядная неевклидова геометрия/окончание цикла, начатого в октябре/,
профессор Н.Я.Виленкин, Комбинаторика и некоторые ее применения.

Для 9-II классов: доцент И.М.Яглом, Математика и генетика /вторая лекция/,
доцент А.Л.Онищик, Гиперболические функции,
профессор Л.А.Скорняков, Алгебраические операции.

Лекции читаются в аудитории 0.2 главного здания МГУ. Для 8-х классов по вторникам с 16 до 18 часов. Для 9-II классов по пятницам с 16 до 18 часов.

Групповые занятия для 7-х классов происходят по субботам с 16 до 19 часов в помещении школы №2 / Ленинский проспект д. 58а, проезд автобусами №№ 111,108,119,144,57

до остановки "Ленинский проспект", троллейбусами 4 и 33 до остановки "Универмаг Москва"/. Тогда же занимается группа для шестиклассников.

Групповые занятия для 8-х классов происходят по вторникам с 18 до 20 часов в следующих аудиториях:

Группа A – ауд. 13-10 механико-математического факультета.
Группа B – ауд. 341 а химического факультета
Группа C – ауд. 341 б химического факультета
Группа D – ауд. 411 химического факультета
Группа E – ауд. 344 химического факультета
Группа F – ауд. 234 химического факультета

Расписание занятий для 9-11 кл. см. на стр. 51.

КОНКУРС ЗАДАЧ ВМШ.

В конкурсе могут участвовать все школьники 7-11 классов. Решения задач следует представлять в письменном виде руководителям групп ВМШ или присылать по адресу: Москва В-234, МГУ, механико-математический факультет; к.12-22, ВМШ. И.В.Гирсанову / для учеников 8-ых классов/ или С.В.Овчинникову /для учеников 9-11-ых классов/.

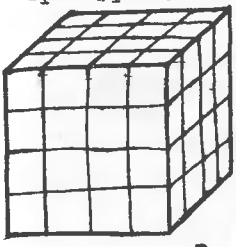
Приводим новые задачи / начало см. в сборниках I – 3*/

7-ые классы.

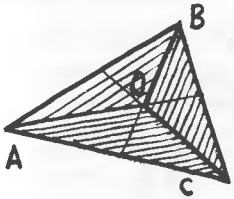
26. В одной урне лежат два белых шара, в другой два черных, в третьей один белый шар и один черный. На каждой урне висела табличка, указывающая ее состав: ББ, ЧЧ, БЧ. Но какой-то шутник перевесил все таблички, так, что теперь каждая из них указывает состав урны неправильно. Разрешается вынуть

*/ Ответственные за подбор конкурсных задач: И.М.Яглом, Л.В.Гончарова / 7 классы/, В.М.Фишман / 8 классы/, А.К.Толпыго / 9-11 классы/.

шар из любой урны, не заглядывая в урну. Какое наименьшее число извлечений потребуется, чтобы определить состав всех трех урн? / После каждого извлечения шар опускается обратно/.

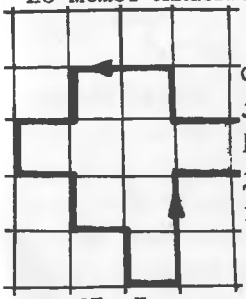


27. Требуется распилить деревянный куб с ребром 40 см. на 64 кубика с ребром I0 см. Это легко сделать девятью разрезами, если не сдвигать распиленные части друг относительно друга. Насколько можно уменьшить это число разрезов, если каждый раз перекладывать распиленные части?



28. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что треугольники OAB, OBC и OCA имеют равные площади.

29. Доказать, что целое число, оканчивающееся цифрами I5, не может являться квадратом целого числа.



30. Город Сигмаград имеет форму квадрата со стороной 5 км. Улицы делят его на кварталы, являющиеся квадратами со стороной 200м. Какую наибольшую площадь можно обойти, пройдя по улицам этого города I0 км. и вернувшись в исходную точку?

3I. Логик попал на остров, населенный двумя племенами. Представители одного племени всегда говорят правду, представители другого-всегда лгут. Путешественник подошел к развилке дороги, и ему пришлось спросить у оказавшегося поблизости местного жителя, какая из двух дорог ведет в деревню. Ему было неизвестно, с представителем какого племени он разговаривает. Тем не менее, задумавшись на минуту,

2-1530

он задал единственный вопрос, из ответа на который он точно узнал, по какой дороге идти. Какой вопрос был задан?

32. Две моторные лодки выходят одновременно из пунктов, расположенных напротив друг друга на разных берегах реки. Они пересекают реку по прямым, перпендикулярным к линии берега. Скорость каждой лодки постоянна, но одна движется быстрее, чем другая. Лодки проходят мимо друг друга в тот момент, когда они находятся на расстоянии 300 м. от ближайшего берега. Достигнув берегов, они остаются у причалов на 10 минут, а затем едут обратно. На обратном пути они встречаются на расстоянии 100 м. от другого берега. Какова ширина реки?

33. Расположите шесть круглых неоточенных карандашей так, чтобы каждые два из них прикасались друг к другу.

34. Три разбойника хотят поделить добычу. Каждый уверен, что он бы поделил добычу на равные части, но остальные ему не доверяют. Если бы разбойников было двое, то выйти из положения было бы легко: один разделил бы добычу на две части, а другой взял бы ту часть, которая ему кажется большей. Укажите, как должны действовать три разбойника, чтобы каждый из них был уверен, что его доля составляет не менее одной трети от всей добычи. / Добыча настолько разнородна, что объективного способа сравнения отдельных частей не существует./

35. Десять школьников пошли гулять. Оказалось, что каждый из них взял с собой денег меньше, чем среднее арифметическое сумм, захваченных остальными. Сколько денег было у каждого из них? / Найти все возможности и доказать, что других воз-

можностей нет./

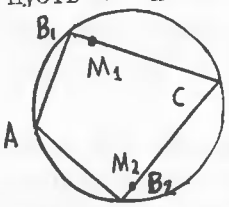
8-ые классы.

21. Доказать, что уравнение $x^2+5y^2=3z^2$ не имеет решений в целых числах.

22. Доказать, что ни для одного многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами не могут иметь места равенства

$$f(7)=11,\quad f(11)=13.$$

23. Пусть A и C – две заданные точки окружности S. Найти геометрическое место середин M всех вписанных в окружность ломанных ABC.

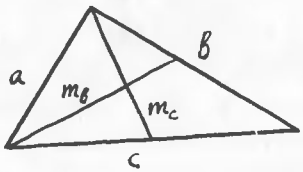


24. Доказать, что каждая правильная дробь $\frac{a}{b}$ может быть представлена в виде

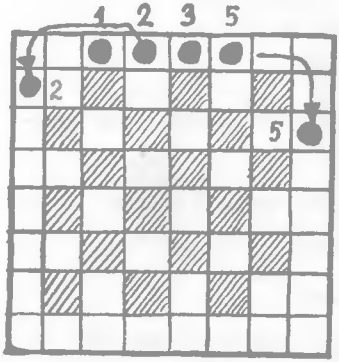
$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\cdots+\frac{1}{q_1q_2\cdots q_n},$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – целые числа, большие I.

25. Доказать, что в треугольнике со сторонами a, b и c медианы m_b и m_c тогда и только тогда взаимно перпендикулярны, когда числа a, b и c связаны соотношением $5a^2=b^2+c^2$.

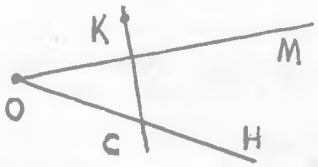


26. Деревянный куб с ребром 40 см. требуется распилить на 64 кубика с ребром I0 см. Если не сдвигать распиленные части друг относительно друга, то потребуется 9 разрезов. Если перекладывать каждый раз распиленные части, то число разрезов можно уменьшить. Найти наименьшее число разрезов, которым можно обойтись, и доказать, что дальнейшее уменьшение этого числа не возможно.



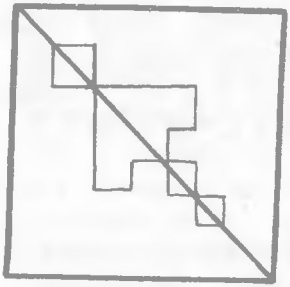
27. Положите четыре монеты достоинством I,2,3 и 5 копеек на 4 соседних поля, расположенных на краю шахматной доски. Разрешается передвигать любую из монет через три поля на четвертое по краю доски. После серии ходов монеты оказываются на исходных четырех полях. В каком порядке они могут расположиться? /Найти все возможности и доказать, что других возможностей нет/.

28. Является ли полным квадратом число, которое получается, если вычесть из числа III...I / двести единиц/ число 222...2 / сто двоек/?



29. Даны угол МОН и точка К вне этого угла. Провести через точку К прямую КС так, чтобы она отсекала от угла МОН треугольник с заданным периметром.

30. См. задачу 26 для 7-ых классов.

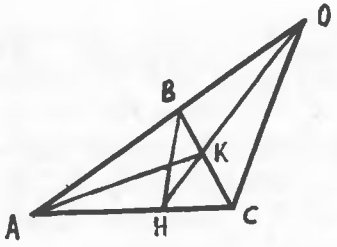


3I. Квадрат со стороной I00 разбит горизонтальными и вертикальными прямыми на I0 000 квадратиков со стороной I. Докажите, что двигаясь по этим горизонталям и вертикалям, нельзя провести замкнутую ломаную длины I966, симметричную относительно главной диагонали большого квадрата./ Ломаной не запрещается пересекать себя./

32. См. задачу 3I для 7-ых классов.

33. См. задачу 33 для 7-ых классов.

34. Задача 34 для 7-ых классов в случае, когда разбойников четверо.



35. В треугольнике ABC сторона AC больше, чем AB. Проведены биссектрисы углов A и B. Их основания H и K соеденены прямой, которая продолжена до пересечения в точке O с продолжением стороны AB. Выразить угол OCA через углы треугольника.

9–II-ые классы.

21. Даны 100 чисел $x_1, \ldots, x_{100}$, сумма которых равна 1, такие, что абсолютная величина каждой из разностей $|x_2 - x_1|, |x_3 - x_2|, \ldots, |x_{100} - x_{99}|$ меньше $\frac{1}{50}$

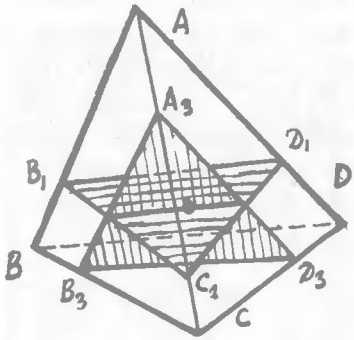
Доказать, что из этих чисел можно выбрать 50 чисел так, чтобы их сумма отличалась от 1/2 не больше, чем на $\frac{1}{100}$.

22. Даны n комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ таких, что отвечающие им точки являются вершинами выпуклого n-угольника. Доказать, что если $\frac{1}{z-c_1} + \frac{1}{z-c_2} + \cdots + \frac{1}{z-c_n} = 0$, то отвечающая z точка плоскости лежит внутри этого n-угольника.

23. На плоскости даны n точек. Доказать, что если каждые четыре из них являются вершинами выпуклого четырехугольника, то и все n точек являются вершинами выпуклого n-угольника.

24. Доказать, что если число α – иррационально, то функция $f(x) = \cos x + \cos \alpha x$ – непериодическая.

25. На ребрах треугольной пирамиды $ABCD$ отложены отрезки $AB_1 = AC_1 = AD_1$, $BA_2 = BC_2 = BD_2$, $CA_3 = CB_3 = CD_3$ и



$DA_4=DB_4=DC_4$ / Точки B_1 и A_2 принадлежат ребру AB, точки C_1 и A_3 ребру AC и т. д./. Оказалось, что центры тяжести треугольников $B_1C_1D_1$, $A_2C_2D_2$ $A_3B_3D_3$ и $A_4B_4C_4$ совпадают. Для каких пирамид это возможно?

26. Задача 34 для 7-ых классов в случае, когда разбойников сорок.

27. Можно ли разбить все натуральные числа на два множества так, чтобы ни одно из этих множеств не содержало никакой арифметической прогрессии?

28. Требуется пройти королем из одного угла шахматной доски в противоположный за 10 ходов. Сколькими способами можно это сделать?

29. В Швамбрании 20 крупных городов, связанных между собой воздушным сообщением. При этом: 1/ все рейсы беспосадочные; самолет поднимается в пункте отправления и впервые приземляется в пункте назначения; 2/ из каждого города можно попасть / иногда с пересадками/ в любой другой город; 3/если отменить какой-нибудь рейс, то условие 2/ уже не будет выполняться. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может иметь общее число рейсов при соблюдении этих условий?

30. Доказать, что если три целых числа удовлетворяют уравнению $x^3+y^3=z^3$, то хотя бы одно из них делится на три.

31. Покажите, что 7 достаточно длинных круглых неоточенных карандашей можно расположить так, чтобы любые два из них прилегали друг к другу.

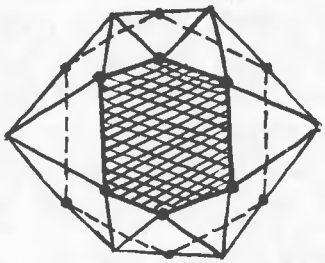
32.Если рассмотреть на плоскости семейство всех параллельных между собой прямых, то через каждую точку плоскости будет проходить одна и только одна прямая из этого семейства.

Доказать, что не существует семейства окружностей с аналогичными свойствами. / Точка окружностью не считается./

33. Пусть $P(x)$ – многочлен 4 – ой степени с целыми коэффициент. Предположим, что при любом целом значении x $P(x)$ – целое число, делящееся на 5. Доказать, что все коэффициенты многочлена делятся на 5.

34. Четыре прямые на плоскости расположены так, что никакие две из них не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке. По каждой из прямых с постоянной скоростью движется пешеход./Скорости различных пешеходов могут быть различны./ Известно, что первый пешеход встретился со вторым, третьим и четвертым, а второй – с третьим и четвертым. Доказать, что третий пешеход встретился с четвертым.

35. На сторонах выпуклого центрально–симметричного шестиугольника построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Вершины этих треугольников, не принадлежащие первоначальному шестиугольнику, соединяются отрезками первая со второй, вторая с третьей и т.д. Доказать, что середины сторон получившегося шестиугольника являются вершинами правильного шестиугольника.



ЗАДАЧИ ЛЕГКИЕ И ТРУДНЫЕ

И.М.Яглом

Задача 1. КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО КРУГОВ, РАВНЫХ ДАННОМУ КРУГУ К МОЖНО ПРИЛОЖИТЬ К ЭТОМУ КРУГУ ТАК, ЧТОБЫ НИ ОДИН ИЗ НИХ НЕ НАЛЕГАЛ НА ДРУГОЙ?

Разумеется, эта задача-легкая: если круг K_1 приложен к равному ему кругу К, то из центра О круга К он виден под углом 60° / рис. I/; если к К приложено несколько непересекающихся кругов, то и отвечающие им углы с вершиной О не пересекаются - поэтому к К можно приложит не больше $360^\circ/60^\circ=6$ равных ему непересекающихся кругов. Шесть кругов к кругу К приложить, очевидно, можно / рис. 2/.

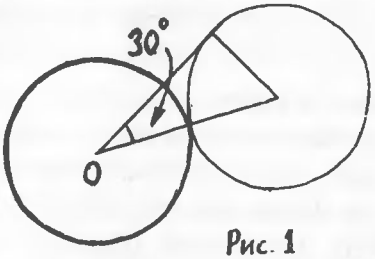


Рис. 1

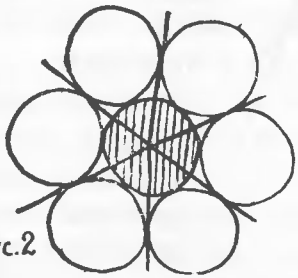


Рис.2

Задача 2. КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО МАТЕРИАЛЬНЫХ / и следовательно - НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ/ ШАРОВ, РАВНЫХ ДАННОМУ ШАРУ Ш, МОЖНО ПРИЛОЖИТЬ К ШАРУ Ш?

Как вы думаете-трудная эта задача, или легкая?

Давайте попробуем ее решить. Будем рассуждать, как при решении задачи I. Если шар $Ш_1$ приложен к равному ему шару Ш, То из центра О шара Ш он виден под "пространственным углом", измеряющимся площадью сферической "шапочки", высекаемой на поверхности шара Ш конусом касательных, проведенных из точки О к шару $Ш_1$. Но поскольку высота этой "шапочки", очевидно, равна

$$1-\cos 30^\circ = 1-\sqrt{3}/2 = 0,134...,$$

/рис.3/, то отношение площади шара к площади "шапочки" равно

$$2:0,134... = 14,9...$$

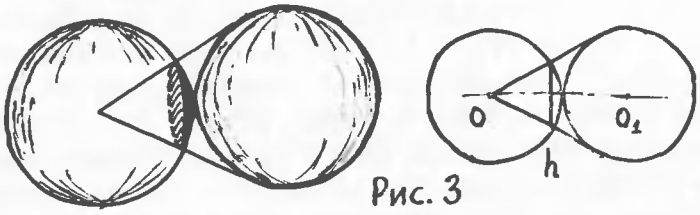


Рис. 3

Отсюда следует, что к шару Ш нельзя приложить больше I4 равных ему шаров.

Ну, а I4 материальных шаров, равных шару Ш, к нему приложить можно? Оказывается, что нет. Не слишком сложные рассуждения, относящиеся к области сферической геометрии / они приведены, например, в интересной книге Л.ФЕЙЕШ ТОТ, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М.,Физматгиз, I958/ показывают, что число равных Ш непересекающихся шаров, которые можно приложить к шару Ш, никак не может превосходить I3.

С другой стороны приложить к шару I2 равных ему материальных шаров заведомо можно–такое расположение шаров было указано ещё в I6II г. знаменитым Иоганом КЕПЛЕРОМ, а практически укладывали круглые шары так, что каждый шар имел I2 соседей, вероятно еще до Кеплера. / Впрочем, крокетные или биллиардные шары вошли в обиход много позже Кеплера, а в те времена, по–видимому, даже и круглые артеллерийские ядра были еще в новинку/. Таким образом задача 2 сводится к следующему вопросу: МОЖНО ЛИ ПРИЛОЖИТЬ К МАТЕРИАЛЬНОМУ ШАРУ I3 РАВНЫХ ЕМУ /НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ/ШАРОВ, ИЛИ ЭТО СДЕЛАТЬ НЕВОЗМОЖНО?

Однако ответить на этот вопрос оказалось вовсе не просто. В I694 г. по этому поводу развернулась даже довольно оживленная полемика. Известный естествоиспытатель того времени Давид ГРЕГОРИ с азартом утверждал, что I3 шаров приложить к шару можно, а Исаак Ньютон говорил, что нельзя, – но доказать свою правоту, т.е. решить задачу 2 ни тому, ни

другому / и Ньютону тоже!/ не удалось. По-видимому, первое решение задачи 2,- а именно доказательство правоты Ньютона,- было дано в 1874 г. /т.е. через 180 лет после дискуссии Грегори - Ньютон!/ немецким геометром Рудольфом ГОППЕ; годом позже это решение было еще усовершенствовано его соотечественником ГЮНТЕРОМ. Однако, даже в варианте Гюнтера доказательство Гоппе оставалось очень сложным и запутанным;мне неизвестно даже, проверил ли кто-либо это доказательство до конца. Во всяком случае Фейеш Тот, автор названной выше книги, проблематика которой тесно связана с задачами 1 и 2, явно считает, что первое надежное решение задачи 2 дал в 1953г. / через 259 лет после дискуссии Грегори - Ньютон!/ наш современник, знаменитый голландский математик Бертольд Людвиг ван дер ВАРДЕН. Еще более простое / но все еще достаточно сложное !/ доказательство невозможности приложить к материальному шару 13 равных ему шаров дал в 1956 г. англичанин Джон ЛИЧ.

Заметим, что задача 2 так долго не поддавалась решению вовсе не потому, что ею мало занимались. Эта задача тесно связана с вопросом о плотнейшем расположении равных материальных / непересекающихся / шаров в пространстве,- а этот последний вопрос является весьма важным и для вычислительной математики, и для теории чисел, и для кристаллографии, и для радиотехники, и для ... Совершенно ясно, что"плотное"расположение 7 кругов на плоскости, изображенное на рис. 2,можно продолжить до / самого плотного из всех возможных!/ расположения непересекающихся кругов на всей плоскости/рис. 4/.

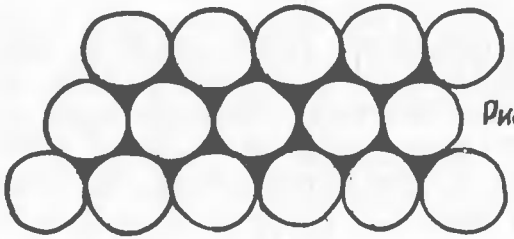


Рис. 4

Однако задача о плотнейшем расположении шаров в пространстве до сих пор не решена. / Впрочем, нет сомнений, что ответ в этой задаче известен: существует бесконечно много расположений шаров в пространстве, о которых когда-нибудь будет доказано, что они являются самыми плотными из всех возможных. Но в пространствах большего числа измерений мы до сих пор не имеем даже удовлетворительного ответа на вопрос о плотнейшем расположении равных непересекающихся шаров,- хотя для приложений было бы очень важно иметь ответ именно на этот последний вопрос/.

Теперь уже никого не удивит, что до сих пор не решена

Задача 3. ЧЕМУ РАВНО НАИБОЛЬШЕЕ ВОЗМОЖНОЕ ЧИСЛО K_n НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ n-МЕРНЫХ ШАРОВ, РАВНЫХ ШАРУ $Ш$, КОТОРЫЕ МОЖНО ПРИЛОЖИТЬ К ШАРУ Ш?

На сегодняшний день доказано лишь, что

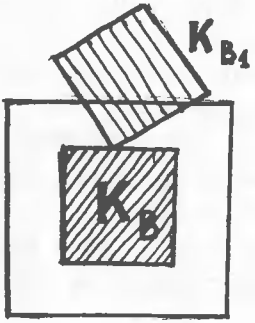
$$24 \le K_4 \le 26;\ 40 \le K_5 \le 48;\ 72 \le K_6 \le 85;\ 126 \le K_7 \le 146;$$
$$240 \le K_8 \le 244;\ldots$$

/Напомним, что $K_3 = 12$, $K_2 = 6$, $K_1 = 2$, - предоставляем вам самим разобраться в том, какой смысл имеет величина K_1 и почему ее следует считать равной двум./ Здесь, пожалуй, можно лишь удивиться, что уже сегодня величина K_8 известна столь точно!

Оставим, однако, в покое круги и шары и перейдем к другим фигурам.

Задача 4. КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО /Кв/КВАДРАТОВ, РАВНЫХ ДАННОМУ КВАДРАТУ Кв, МОЖНО ПРИЛОЖИТЬ К КВАДРАТУ Кв ТАК, ЧТОБЫ НИКАКИЕ ДВА ИЗ НИХ НЕ ПЕРЕСЕКАЛИСЬ МЕЖДУ СОБОЙ?

Эта задача не является ни особенно легкой, ни совсем трудной - может быть ее следует назвать средней? Легко понять, что 8 квадратов к данному квадрату Кв приложить можно. /[illegible]/. С другой стороны, нетрудно показать, что если к квадрату Кв приложен равный ему квадрат $Кв_1$, то он всегда высекает на контуре концентрического / и параллельно расположенного/ с квадратом Кв квадрата вдвое большего размера ломаную/или отрезок/длины не меньше I. Отсюда сразу сле-



дует, что больше 8 / = 8/I / квадратов к квадрату Кв приложить нельзя. Таким образом $K_2(K_B)=8$.

Вот еще две задачи, решений которых я не знаю:

Задача Г. КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО $K_2(T)$ РАВНОСТОРОННИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, РАВНЫХ ЗАДАННОМУ ТРЕУГОЛЬНИКУ Т, МОЖНО ПРИЛОЖИТЬ К Т ТАК, ЧТОБЫ НИКАКИЕ ДВА ИЗ НИХ НЕ ПЕРЕСЕКАЛИСЬ?

Задача Д. КАКОЕ НАИБОЛЬШЕЕ ВОЗМОЖНОЕ ЧИСЛО $K_3(K_\delta)$ КУБОВ, РАВНЫХ ЗАДАННОМУ КУБУ Кб, МОЖНО ПРИЛОЖИТЬ К КУБУ КбТАК, ЧТОБЫ НИКАКИЕ ДВА ИЗ ЭТИХ КУБОВ НЕ ПЕРЕСЕКАЛИСЬ?

Нумерация этих задач показывает, что они включаются в особый конкурс более трудных задач, характеризующийся отсутствием заранее фиксированного времени подачи решений.*/

Разумеется, было бы весьма интересно решить и следующую более трудную задачу:

Задача 5. ПУСТЬ $K_2(\Phi)$ – НАИБОЛЬШЕЕ ВОЗМОЖНОЕ ЧИСЛО ПЛОСКИХ ФИГУР, РАВНЫХ ЗАДАННОЙ ФИГУРЕ Ф; КОТОРЫЕ МОЖНО ПРИЛОЖИТЬ К ФИГУРЕ Ф ТАК, ЧТОБЫ НИКАКИЕ ДВЕ ИЗ ЭТИХ ФИГУР НЕ ПЕРЕСЕКАЛИСЬ. КАК ОПРЕДЕЛИТЬ ЧИСЛО $K_2(\Phi)$ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОЙ ФИГУРЫ Ф?/ Или – КАКИЕ ЗНАЧЕНИЯ МОЖЕТ ПРИНИМАТЬ ЧИСЛО $K_2(\Phi)$? Или – В КАКИХ ПРЕДЕЛАХ МОЖЕТ ИЗМЕНЯТЬСЯ; скажем: ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО, ЧТО ВСЕГДА $6 \leq K_2(\Phi) \leq 9$?/ Однако эту задачу / не говоря уж о ее трехмерном и многомерных вариантах!/ я не могу решиться включить в конкурс задач даже для УЧАЩИХСЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ.

/ В этой задаче естественно ограничиться классом более простых – выпуклых фигур: фигура называется выпуклой, если она содержит целиком каждый отрезок, соединяющий две ее точки./ Боюсь, что на сегодняшний день вся относящаяся к задаче 5

*/Задачи А, Б и В помещены в сборнике I.

информация, которой располагает наука, содержится в двух фигурирующих выше равенствах $K_2(K)=6$ и $K_2(K_в)=8$.

Задача 5 является, вероятно, весьма сложной. Можно попытаться упростить ее, условившись, что прикладываемые к фигуре Ф фигуры расположены параллельно Ф / т.е. получаются из Ф параллельными переносами – вращения запрещены!/. Это ограничение ничего не меняет в содержании задачи 5, если рассматриваемые фигуры-круги ; однако во всех иных случаях оно существенно упрощает эту задачу, так как уменьшает число вариантов допустимых расположений прикладываемых фигур. Задачу, получаемую при таком ограничении из задачи 5, мы будем называть задачей 5, а фигурирующее в этой задаче число / заменяющее число $K_2(\Phi)$ – числом $\overline{K}_2(\Phi)$.

Из решения задачи I следует, что $\overline{K}_2(K)=6$; решение задачи 4 и рис. 5 показывают, что $\overline{K}_2(K_в)=8$. Замечательно, что ЭТИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ИСЧЕРПЫВАЮТСЯ ВСЕ ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛА $\overline{K}_2(\Phi)$. А именно, в 1957 г. один из крупнейших современных геометров, швейцарец Гуго ХАДВИГЕР доказал, что для всех выпуклых фигур Ф

$$6 \le \overline{K}_2(\Phi) \le 8$$

/ доказательство этого включено в скоро выходящую в свет на русском языке книгу Г.ХАДВИГЕР, Г.ДЕБРУННЕР, Комбинаторная геометрия на плоскости/, а в 1959 г. американец К.Дж.ХАЛЬБЕРГ-младший, Е.ЛЕВИН и Е.Г.СТРАУС показали, что это неравенство сохраняет силу и для невыпуклых плоских фигур. Хадвигер же предположил, что равенство $\overline{K}_2(\Phi)=8$ имеет место лишь в том случае, если фигура Ф – параллелограмм. Это предположение Хадвигера доказал в 1961 году остроумный израильский геометр Бранко ГРЮНБАУМ, который одновременно установил, что если Ф – не параллелограм, то $\overline{K}_2(\Phi)=6$ / здесь Ф – выпуклая фигура/.

Мне осталось досказать очень немного. Обобщением задачи 5 является

Задача 5. ПУСТЬ Ф – ПРОИЗВОЛЬНОЕ /ВЫПУКЛОЕ/ ТЕЛО В n – МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ / n может равняться 3./

ОБОЗНАЧИМ ЧЕРЕЗ $\bar{\kappa}_n(\Phi)$ НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО РАВНЫХ Ф НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТЕЛ, КОТОРЫЕ МОЖНО ПРИЛОЖИТЬ К Ф, ТАК, ЧТОБЫ ВСЕ ОНИ БЫЛИ РАСПОЛОЖЕНЫ ПАРАЛЛЕЛЬНО Ф / получились из Ф параллельным переносом/. ЧЕМУ МОЖЕТ БЫТЬ РАВНО ЧИСЛО $\bar{\kappa}_n(\Phi)$?

В той же работе 1957 г. ХАДВИГЕР показал, что $\bar{\kappa}_n(\Phi) \le 3^n - 1$ / в частности, $\bar{\kappa}_3(\Phi) \le 26$ /. В 1961 г. немец Гельмут ГРЕМЕР показал, что $\bar{\kappa}_n(\Phi) = 3^n - 1$ только в том случае, если Ф – n – мерный параллелепипед; при $n = 2$ этот результат совпадает с гипотезой Хадвигера. Ещё больших успехов добился Б.ГРЮНБАУМ, который в своей работе от 1961 г. показал, что

$$n^2 + n \le \bar{\kappa}_n(\Phi) \le 3^n - 1$$ / в частности $12 \le \bar{\kappa}_3(\Phi) \le 26$ /,

причем оба указанные крайние значения могут достигаться: $\bar{\kappa}_n(\Phi) = 3^n - 1$, если Ф – n – мерный параллелепипед, $\bar{\kappa}_n(\Phi) = n^2 + n$, если Ф – n – мерный симплекс/. Грюнбаум предположил даже, что ЧИСЛО $\bar{\kappa}_n(\Phi)$ МОЖЕТ ПРИНИМАТЬ ВСЕ Н Е Ч Ё Т Н Ы Е ЗНАЧЕНИЯ МЕЖДУ n^2+n И 3^n-1 И ТОЛЬКО ЭТИ ЗНАЧЕНИЯ; ТАК ОН ПРЕДПОЛОЖИЛ, ЧТО $\bar{\kappa}_3(\Phi)$ может быть равно 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24или 26.
При этом Грюнбаум построил примеры – впрочем, стоп!

Задача Е. ПОСТРОИТЬ 8 ТРЕХМЕРНЫХ МНОГОГРАННИКОВ М, ДЛЯ КОТОРЫХ

$$\bar{\kappa}_3(M) = 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 \text{ и } 26.$$

/ Подсказка: $\bar{\kappa}_3(M) = 12$, если М – треугольная пирамида или тетраэдр; $\bar{\kappa}_3(M) = 26$, если М, например, куб./

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

А.Колмогоров

Далее публикуется конспект лекций, читавшихся в сентябре 1964 года девятым классам физико-математической школы-интерната при МГУ. За этой темой следовала тема "Скалярные величины и действительные числа". Система скалярных величин / без прилагательного " положительных " / определялась как упорядоченная коммутативная группа по сложению с надлежащими свойствами непрерывности, действительные числа как аддитивные монотонные операторы в такой группе. Несколько позднее обнаруживалось, что система скалярных величин может рассматриваться и как одномерное векторное пространство.

Работа с девятыми классами приема 1965 года пошла по несколько другому направлению: без затраты времени на приведение в порядок представлений о действительных числах, они уже в первой четверти научились дифференцировать, вычислять суммы бесконечных рядов и т.п. Подведение под это движение вширь солидной логической базы предполагается во втором полугодии. Насколько при этом пригодятся публикуемые сейчас материалы, еще не вполне ясно.

§ I. Арифметика целых неотрицательных чисел / повторение/.

Обозначения $a \in \mathcal{M}$, $b \notin \mathcal{M}$ / a принадлежит множеству $\mathcal{M}$, b не принадлежит $\mathcal{M}$ /.

I. Бесконечное множество целых неотрицательных чисел

$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Множество натуральных чисел $\mathcal{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$.

2. Сложение $c = a + b$ - операция всегда выполнимая в пределах $\mathcal{N}$.

3. $a < b$ в том и только в том случае, когда существует $x \in \mathcal{N}^+$, для которого

$$a + x = b.$$

4. $c = a - b$, если $b + c = a$. Вычитание – однозначная операция, выполнимая в пределах $\mathcal{N}$ в том и только в том случае, когда $b \leq a$.

5. Умножение

$$c = ab$$

– операция, всегда выполнимая в пределах $\mathcal{N}$.

7. Деление с остатком. Если $a \in \mathcal{N}$, $b \in \mathcal{N}^+$, то однозначно определены $q \in \mathcal{N}$ и $r \in \mathcal{N}$, для которых

$$a = bq + r, \qquad r < b.$$

При этом $q = \left[\frac{a}{b}\right]$ называется "целой частью частного $\frac{a}{b}$", r – остаток при делении a на b.

Если $r = 0$, то говорят, что a делится на b, или a есть кратное числа b, или b есть делитель числа a.

8. Десятичная система счисления.

Для любого $a \in \mathcal{N}^+$ последовательным делением на десять получаем: $a = 10a_0 + b_0$, $b_0 < 10$,

$a_0 = 10a_1 + b_1$, $a = 10^2 a_1 + 10b_1 + b_0$, $b_1 < 10$,

$a_1 = 10a_2 + b_2$, $a = 10^3 a_2 + 10^2 b_2 + 10b_1 + b_0$, $b_2 < 10$,

. . . . . .

Процесс этот заканчивается, когда / на каком-то шагу с номером n / получим

$$a_n = 0.$$

Таким образом, любое число $a \in \mathcal{N}^+$ представляется в виде

$$a = 10^n b_n + 10^{n-1} b_{n-1} + \ldots + 10b_1 + b_0,$$

где

$$0 < b_n < 10, \quad 0 \leq b_k < 10 \qquad \text{при } k < n.$$

Число a записывается в виде

$$a = b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0.$$

§ 2. Двоичная система счисления и система счисления с произвольным основанием.

Легко понять, что в § I.8 вместо числа I0 можно было взять любое целое $\omega > 1$. Например, в результате последовательного деления на 2

39	I
I9	I
9	I
4	0
2	0
I	I

/ в правой колонке записаны остатки /

получаем

$$39 = 2^5 + 2^2 + 2 + 1 ,$$

т.е. в двоичной системе счисления

$$39 = \overline{100111}$$

/ на некоторое время двоичную запись для отличия от десятичной отмечаем чертой сверху/.

Пример перехода от двоичной записи к десятичной:

$$\overline{1010100111} = 1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 1 + 8 + 32 + 128 = 169.$$

Следует научиться выполнять четыре арифметических действия в двоичной и любой другой системе счисления. В двоичной системе очень просто выполняется и вычисление квадратных корней.

ПРИМЕР: $\sqrt{10'10'10'01} = \overline{1101} = 13$

$$\begin{array}{l} -1 \\ \hline 110 \\ -101 \\ \hline 11001 \\ -11001 \\ \hline \end{array}$$

§ 3. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель.

В этом параграфе мы будем иметь дело только с натуральными числами. Лишь для остатков при делении в ходе доказа-

тельств будет допускаться значение 0.

Наименьшим кратным двух натуральных чисел a и b называется наименьшее из натуральных чисел, делящихся как на a, так и на b. Оно обозначается

$$m=[a,b].$$

Так как одним из общих кратных чисел a и b является их произведение ab и каждое общее кратное чисел a и b должно делиться на a, то для нахождения m достаточно проверить делимость на b чисел $a, 2a, 3a, \ldots, ba$.

ТЕОРЕМА I. Любое общее кратное M чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное m.

В самом деле, M можно представить в виде

$$M=qm+r.$$

Остаток r делится как на a, так и на b. Но, так как этот остаток меньше m, то он может быть только нулем.

Любые два натуральные числа имеют общий делитель I. Так как каждый их общий делитель не превосходит каждого из них, то существует их наибольший общий делитель

$$d=(a,b).$$

ТЕОРЕМА 2. Всегда

$$md=ab,$$

т.е.

$$(a,b)=\frac{ab}{[a,b]}.$$

Любой общий делитель D чисел a и b является делителем их наибольшего общего делителя d.

Доказательство. Так как произведение ab есть общее кратное чисел a и b, то в силу теоремы I оно делится на m. Целое число

$$d=ab/m$$

является делителем a и b, так как

$$\frac{a}{d}=\frac{m}{b} \qquad \frac{b}{d}=\frac{m}{a},$$

где $\frac{m}{b}$ и $\frac{m}{a}$ числа целые.

С другой стороны, если D есть какой-либо общий

делитель a и b, то

$$M = ab/D$$

будет общим кратным a и b и в силу теоремы I имеет вид

$$M = kt.$$

Поэтому

$$d = \frac{ab}{t} = \frac{kab}{M} = kD,$$

т.е. d делится на D.

Числа a и b называются взаимно простыми, если

$$(a, b) = 1.$$

В силу теоремы 2 числа a и b взаимно просты в том и только в том случае, когда $[a, b] = ab$.

ТЕОРЕМА 3. Если делитель x произведения ab взаимно прост с a, то он является делителем другого множителя b.

Доказательство. Если x взаимно просто с a, то

$$[x, a] = xa.$$

По теореме I число ab, являющееся общим кратным x и a, должно делиться на xa, а следовательно b делится на x.

Для нахождения общего наибольшего делителя служит алгоритм Эвклида, с которым мы еще несколько раз встретимся. Если

$$a_1 \geqslant a_2$$

то для нахождения $d = (a_1, a_2)$ поступают так:

$$\begin{aligned}
a_1 &= q_2 a_2 + a_3, & a_3 &< a_2, \\
a_2 &= q_3 a_3 + a_4, & a_4 &< a_3, \\
a_3 &= q_4 a_4 + a_5, & a_5 &< a_4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{k-1} &= q_k a_k + a_{k+1}, & a_{k+1} &< a_k, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Так как

$$a_2 > a_3 > a_4 > \cdots,$$

процесс должен кончиться на том, что при каком-либо шаге остаток будет равен нулю, т.е. получится

$$a_{n-1} = q_n \cdot a_n .$$

Докажите, что

$$d = a_n$$

и будет наибольшим общим делителем чисел a_1 и a_2 .

§ 4. Разложение на простые множители.

Натуральное число, большее, чем единица, называется простым, если оно не имеет других делителей кроме самого себя и единицы. Т.о. единица к простым числам не причисляется. Первые десять простых чисел таковы:

2, 3, 5, 7, II, I3, I7, I9, 23, 29.

Теорема. Каждое натуральное число $n > 1$ единственным образом представляется в виде произведения

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k ,$$

где числа

$$p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$$

простые.

Доказательство основано на лемме:

Лемма. Если произведение ab делится на простое число p , то хотя один из множителей a и b делится на p .

Эта лемма является непосредственным следствием теоремы 4 из § 3. Только она и нужна нам сейчас из теории, развитой в § 3.

§ 5. Положительные скалярные величины.

См. БСЭ т.7, стр. 340.

Вам уже известно много примеров систем скалярных величин:

длины отрезков, площади плоских фигур, объемы пространственных фигур, промежутки времени / минута, пять минут, сутки и т.п./, массы тел, скорости и т.д. Две величины одной и той же системы можно сложить и получить величину

той же системы. Две величины, принадлежащие одной и той же системе, можно сравнивать. Сравнение приводит к одному из трех результатов:

$a < b$, или $a = b$, или $b < a$.

Сравнивать величины разных систем бессмысленно / не имеет смысла вопрос о том, что больше, минута или метр/.

В математике несколько идеализируют свойства реальных величин и считают, что система положительных скалярных величин

$$S = \{a, b, c, \dots\}$$

должна обладать такими свойствами:

I. Если $a \in S$ и $b \in S$, то имеет место одно и только одно из соотношений

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

3. Для любых $a \in S$ и $b \in S$ определена величина

$$c = a + b$$

которая тоже принадлежит S .

4. Всегда $a + b = b + a$.

5. Всегда $a + (b + c) = (a + b) + c$.

6. Всегда $a + b > a$.

7. Если $a > b$, то существует одна и только одна величина $c = a - b$, для которой

$$b + c = a.$$

8. Каковы бы ни были $a \in S$ и натуральное число n , существует величина $b \in S$, для которой

$$nb = a.$$

9. Каковы бы ни были $a \in S$ и $b \in S$, существует такое натуральное число n , что

$$nb > a.$$

В свойствах 8 и 9 принято обозначение

$$nb = \underbrace{b + b + \dots + b}_{n \text{ раз}}.$$

Свойство 8 выражает неограниченную возможность деления на равные части. Вместо

$$nb=a$$

пишут

$$b=\frac{a}{n}.$$

Можно доказать, пользуясь свойствами I–7, однозначность деления / для данных a и n существует только одна величина b, для которой $nb=a$ /. Мы однако не ставим перед собой задачи формального вывода из свойств I–9 всех обычных правил вычислений с величинами.

Свойство 9 называется аксиомой ЭВДОКСА, или АРХИМЕДА. Она существенна для построения теории измерения величин, геометрической теории пропорциональных отрезков и теории подобия геометрических фигур. См. Киселев, Геометрия ч.I, гл. третья.

§ 7. Измерение величин /I/.

Выберем величину e в качестве единицы измерения. В силу аксиомы Архимеда для любой другой величины a в ряду

$$e, 2e, 3e, \ldots$$

найдется величина, превосходящая a. Обозначим через $q+1$ первое из натуральных чисел, для которого

$$(q+1)e > a.$$

Тогда

$$q=\left[\frac{a}{e}\right]$$

называется целой частью отношения $\frac{a}{e}$. Очевидно, что всегда $\left[\frac{a}{e}\right]$ является неотрицательным целым числом / если $a<e$, то $q=0$ /.

Будем последовательно делить единицу измерения пополам, еще раз пополам и т.д.:

$$e_0=e,\ e_1=\frac{e}{2},\ e_2=\frac{e_1}{2},\ \ldots,\ e_n=\frac{e_{n-1}}{2}=\frac{e}{2^n},\ \ldots$$

Процесс двоичного измерения величины a можно теперь изобразить формулами

$$a=qe+a_0 \qquad (a_0<e),$$
$$a_0=q_1e_1+a_1 \qquad (a_1<e_1),$$

$$a_1 = q_2 e_2 + a_2 \qquad (a_2 < e_2),$$
. . . . . .

Неполные частные q_n могут принимать только два значения 0 и I.

Очевидно, при любом n

$$a = qe + q_1 \frac{e}{2} + q_2 \frac{e}{2^2} + \dots + q_n \frac{e}{2^n} + a_n, \quad a_n < \frac{e}{2^n}.$$

Замечание. Процесс десятичного измерения длины отрезка описывается в § I50 ч.I "Геометрии" Киселева.

В некоторых случаях процесс двоичного измерения продолжается неограниченно, причем остатки a_n при любом n положительны. Например, для

$$a = e/3$$

получаем

$$a = \frac{e}{2^2} + \frac{e}{2^4} + \frac{e}{2^6} + \frac{e}{2^8} + \dots + \frac{e}{2^{2m}} + \frac{e}{3 \cdot 2^{2m}},$$

$$q, q_1 q_2 q_3 \dots = 0,01010101\dots$$

Если при каком-либо n получается точное равенство

$$a = qe + q_1 \frac{e}{2} + \dots + q_n \frac{e}{2^n},$$

то будем считать, что все дальнейшие неполные частные q_m и остатки a_m равны нулю. Такое соглашение позволяет считать, что при десятичном измерении всегда получается бесконечная последовательность чисел

$$q, q_1, q_2 \dots q_n \dots$$

Положим */

$$A_n = qe + q_1 \frac{e}{2} + \dots + q_n \frac{e}{2^n},$$

$$B_n = A_n + \frac{e}{2^n}.$$

Легко проверить, что

$$qe = A_0 \le A_1 \le A_2 \le \dots \le A_n \le \dots \le a < \dots \le B_n \le \dots \le B_2 \le B_1 \le B_0 = (q+1)e,$$

$$B_n - A_n = e/2^n.$$

---

*/ Покажите, что

$$a = m \frac{e}{2^n},$$

где

$$m = \left[\frac{2^n a}{e}\right] = q \cdot 2^n + q_1 \cdot 2^{n-1} + \dots + q_n.$$

Эти неравенства позволяют доказать, что последовательность

$$q, q_1 q_2 \cdots q_n \cdots \qquad /I/$$

<u>однозначно определяет</u> / при заданной единице измерения/ величину a . В самом деле, если бы последовательность /I/ получалась в процессе двоичного измерения двух различных величин a и $a' > a$, то при любом n выполнялось бы неравенство

$$a' - a \le B_n - A_n = \frac{e}{2^n},$$

из которого вытекает неравенство

$$2^n (a' - a) \le e. \qquad /2/$$

Но соблюдение неравенства /2/ при любом n противоречит аксиоме Архимеда.

Получаемая в результате двоичного измерения последовательность /I/ обладает такими свойствами:

/а/ q – целое неотрицательное, q_n – нуль, или единица;

/б/ хотя бы одно из чисел последовательности положительно;

/в/среди чисел q_n бесконечное число нулей.

Естественно поставить вопрос, что получится, если взять произвольную последовательность чисел /I/, обладающую свойствами/а/,/б/,/в/. Не будет ли всегда такой последовательности соответствовать величина a , из которой заданная последовательность получается при двоичном измерении? Положительный ответ на этот вопрос получается, если потребовать, чтобы система величин S обладала еще одним свойством:

I0. <u>Аксиома существования верхней грани у ограниченной неубывающей последовательности</u>. Если

$$a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b,$$

то среди величин, не меньших любой величины a_n, существует наименьшая:

$$a = \sup a_n$$

§ 8. Положительные действительные числа.

Результаты предшествующего параграфа могут быть изложены кратко так: выбрав единицу измерения e при помощи процесса двоичного измерения, получаем взаимное соответствие между величинами системы S, обладающей свойствами I-IO и числовыми последовательностями со свойствами / а/-/в /:

$$a \longleftrightarrow q_1, q_1, q_2\, q_3 \ldots q_n \ldots$$

Можно по определению считать, что последовательность

$$\alpha = q_1, q_1, q_2 \ldots q_n \ldots$$

есть число, величина же a получается в результате умножения единицы измерения e на число α :

$$a = \alpha e.$$

Сравните такой подход с § 6 второй части алгебры Киселева, где говорится: " десятичные бесконечные непериодические дроби называются иррациональными числами". Существует еще много способов введения действительных чисел, которые связывают самое определение действительного числа с тем или иным способом записи / обозначения / числа: по десятичной или двоичной системе счисления и т.п.

Можно, однако, избежать обращения в самом определении к специальному способу записи числа. К такому способу введения действительных чисел мы и переходим.

В формуле

$$a' = na,$$

где n натуральное число, можно считать натуральное число n "оператором", который любой величине a системы S ставит в соответствие новую величину a' той же системы. Наши операторы обладают свойством аддитивности: при любых a и b

$$n(a+b) = na + nb.$$

Умножением на натуральные числа не исчерпываются аддитивные операторы над величинами. Таков же, например, оператор $b = \beta a = m\frac{a}{n}$.

который можно обозначить

$$\beta = \frac{m}{n}.$$

Если m не делится на n, то это дробное число.

ТЕОРЕМА. Любой аддитивный оператор в системе величин S, обладающий свойствами I–IO из §§6–7 представляется в виде

$$b = \beta a = \sup b_n,$$

где

$$b_n = q a + q_1 \frac{a}{2} + \dots + q_n \frac{a}{2^n}$$

и последовательность

$$q, q_1, q_2 \dots q_n \dots$$

обладает свойствами /а/–/в/ из § 7.

Указание. Докажите сначала такую лемму: аддитивный оператор на системе положительных величин монотонен, т.е. для аддитивного γ из $b > a$ вытекает

$$\gamma b > \gamma a.$$

После этого доказательство теоремы уже не трудно.

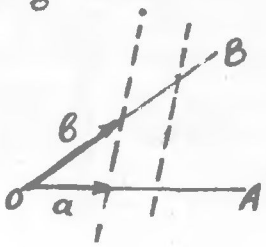
Теорема окончательно убеждает нас в разумности такого определения: положительное действительное число – это аддитивный оператор в системе положительных величин со свойствами I–IO.

Замечание. В случае длин отрезков длина

$$b = \beta a$$

получается из длины a таким построением:

На стороне OA $\angle$ AOB откладывается отрезок длины a с началом в вершине угла O. Через конец отрезка проводится прямая, параллельная направлению, характеризующему оператор β. Эта прямая на стороне OB отсекает отрезок длины b



Теперь мы можем очень просто и естественно определить сложение и умножение положительных действительных чисел.

I. Оператор $\gamma = \alpha + \beta$ это оператор, преобразующий x в

$$\gamma x = \alpha x + \beta x.$$

2. Оператор $\gamma = \alpha\beta$ это оператор, преобразующий x в результат последовательного применения операторов β и α:

$$\gamma x = \alpha(\beta x).$$

Сформулированная выше теорема допускает обращение: если последовательность

$$q, q_1, q_2, \ldots q_n \ldots$$

обладает свойствами /а//в/ из § 7, то оператор β , определяемый равенствами

$$\beta a = \sup b_n, \quad b_n = q a + q_1 \frac{a}{2} + \ldots + q_n \frac{a}{2^n}$$

будет монотонным и аддитивным.

Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между последовательностями со свойствами /а//в/ и мотонными аддитивными операторами в системе положительных величин. Поэтому и получается, что для дальнейшего развития математической теории не имеет значения, ввели ли мы действительные числа как последовательности со свойствами /а//в/, или как операторы. От какой системы положительных величин со свойствами I–I0 мы отправлялись, оказывается тоже не существенным, так как они все "изоморфны". С понятием "изоморфизма" более глубоко мы познакомимся позднее.

Замечание. Операторный подход к построению числовых систем получит далее интересное развитие. Действительные числа / здесь имеются в виду не только рассмотренные пока положительные числа, но и нуль и отрицательные числа/ могут рассматриваться как операторы, преобразующие вектор на плоскости $\bar{e}$ в вектор

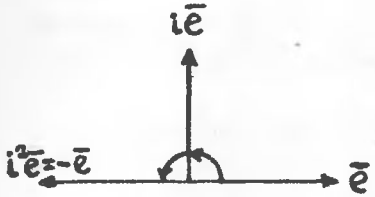
$$\bar{e}' = a\bar{e}$$

Введем новую операцию $\bar{e}' = i\bar{e}$

поворота на прямой угол против часовой стрелки. Легко видеть, что

$$i^2 = -1.$$

/см. чертеж/. Система операторов вида



$$a + bi,$$

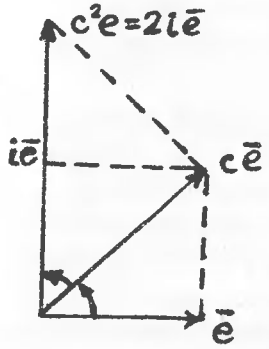
где a и b действительные числа, называется системой комплексных чисел. Сложение и умножение комплексных чисел определяется так, как было сказано выше. Например,

$$c = 1 + i$$

есть оператор поворота на 45° с последующим растяжением в $\sqrt{2}$ раз. Возводя c в квадрат, получим

$$c^2 = (1+i)^2 = 2i$$

Это оператор поворота против часовой стрелки на 90° с последующим растяжением в два раза / см. чертеж/.



§ 9. Роль теории измерения величин и действительных чисел в геометрии.

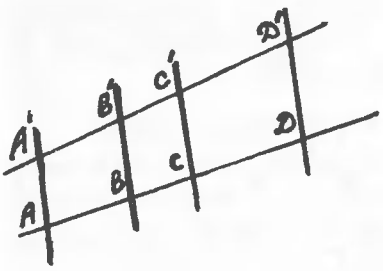
В курсе восьмилетней школы осталась не доказанной теорема, лежащая в основе теории подобия, а через нее и многих дальнейших разделов геометрии:

Соответствующие отрезки, отсекаемые пучком параллельных прямых на двух секущих, пропорциональны: если

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD',$$

то

$$\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}.$$



/ср.Никитин,Геометрия,§84/. Ее отчетливое доказательство в курсе восьмилетней школы было невозможно уже потому, что там не было ясно сказано, что такое отношение двух величин. С устранения этого пробела и начнется наш курс геометрии 9-го класса.

§ 10. Иррациональные числа, несоизмеримые величины.

Числа вида

$$a = \frac{m}{n},$$

где m целое неотрицательное и n натуральное, называются положительными рациональными числами. Легко доказать, что любое рациональное число выражается двоичной дробью, знаки которой начиная с некоторого места чередуются периодически. Например:

$$7/20 = 0,01\underline{010}01001001\ldots = 0,01(010)$$

В арифметике этот факт был установлен для десятичного представления чисел.

Поэтому, число

$$1,0100100010001000001\ldots$$

/ после n-ой единицы n нулей/ не может быть рациональным. Не рациональные числа называются иррациональными.

Две величины / естественно, однородные, т.е. принадлежащие одной и той же системе величин со свойствами I-IO/ называются соизмеримыми, если их отношение рационально. Естественно, что для соизмеримости a_1 и a_2 необходимо и достаточно существование величины e, которая содержится целое число раз как в a_1, так и в a_2:

$$a_1 = n_1 e, \quad a_2 = n_2 e.$$

Такая величина e называется общей мерой величин a_1 и a_2.

Общая мера, если она существует / т.е. для соизмери-

мых a_1 и a_2 / может быть найдена при помощи алгоритма Эвклида: предполагая $a_1 \geqslant a_2$, ищем последовательно натуральные числа q_k, для которых

$$a_1 = q_2 a_2 + a_3, \qquad a_3 < a_2,$$
$$a_2 = q_3 a_3 + a_4, \qquad a_4 < a_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{k-1} = q_k a_k + a_{k+1}, \qquad a_{k+1} < a_k.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Теорема. Если алгоритм заканчивается на том, что

$$a_{k-1} = q_k a_k,$$

то величины a_1 и a_2 соизмеримы, величина a_k является их общей мерой и целым кратным любой другой общей меры a_1 и a_2.

Если процесс продолжается неограниченно, то величины a_1 и a_2 несоизмеримы.

Доказательство. Если e есть общая мера a_1 и a_2, т.е.

$$a_1 = n_1 e, \quad a_2 = n_2 e,$$

то

$$a_3 = (n_1 - q_2 n_2) e,$$

т.е. остаток a_3, подобно величинам a_1 и a_2, является целым кратным от e. Аналогичное рассуждение приводит к выводу, что при любом k

$$a_k = n_k e.$$

Натуральные числа n_k идут убывая. Поэтому процесс должен кончиться на том, что

$$a_{k-1} = q_k a_k = (q_k n_k) e = m e.$$

Замечание. Так как q_k натуральные числа и $a_{k+1} < a_k$, то

$$a_{k-1} \geqslant 2 a_{k+1}.$$

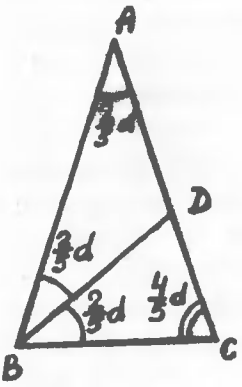
Поэтому

$$a_{2m} \leq \frac{a_1}{2^m}$$

при достаточно большом m становится меньше любой наперед заданной положительной величины e / это следствие аксиомы Архимеда/.

При помощи алгоритма Эвклида математики древней Греции получили первые доказательства существования несоизмеримых величин / с нашей же точки зрения – и иррациональных чисел!/.

ПРИМЕР. Рассмотрим правильный десятиугольник. Радиусы, проведенные в две смежные вершины вместе с соединяющей их стороной образуют равнобедренный треугольник с углом $2/5d$ при вершине. Откладываем на отрезке AC отрезок $AD = BC$.



Треугольник BDC подобен первоначальному. Поэтому алгоритм Эвклида будет продолжаться неограниченно, причем неполные частные будут все время равны единице:

$$a_1 = AC = AD + DC = a_2 + a_3,$$
$$a_2 = BC = a_3 + a_4,$$
$$a_3 = a_4 + a_5,$$
$$a_4 = a_5 + a_6,$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

В п.148 учебника Киселева показано, что при измерении диагонали квадрата его стороной неполные частные начиная со второго равны 2. Поэтому, отношение диагонали к стороне, т.е. число $\sqrt{2}$ иррационально.

Задача. Докажите чисто арифметически, что не существует дроби m/n, квадрат которой равен двум / воспользуйтесь теоремой § 4 о единственности разложения на простые множители/.

В ШКОЛЕ-ИНТЕРНАТЕ № I8.

Физико-математическая школа - интернат при МГУ работает с декабря I963 года. Прием в нее производится по конкурсу из всех областей РСФСР, не отнесенных к сфере деятельности Ленинградской школы, в девятые и десятые классы. В I963 году I9 человек было принято в II-ый класс. Все они окончили школу в I964 году и поступили:
I3-на механико-математический факультет МГУ,
I - на физический факультет, 4 - в Физико-технический институт, I - на Физико-технического отделение/ института / в областном городе/.

Выпуск I965-го года состоял из I0I человека.
Они в большинстве поступили в ВУЗы:

33 - мех.-мат.МГУ	4 - физ.факи других гор.
20 - физ.фак. МГУ	2 - МВТУ
I7 - физ.-техн.	2 - МИФИ
9 - мех маты других городов	3 - МАИ
4 - МЭИ	2 - био.фак. и мед.ин-т.

Всего школе известно о поступлении в ВУЗы 96 человек этого выпуска.

Программы по математике пока для каждого потока различны. При установленном теперь двухлетнем сроке обучения / 9 и I0 класс/ учащиеся сдают выпускные экзамены по алгебре и анализу после трех семестров /в январе, в середине второго года обучения/. В этом выпуске "Математической школы" печатаются программы экзаменов для десятых классов на январь I966 г. Экзамен по геометрии сдается в июне вместе с экзаменами по физике и общеобразовательным предметам.

В будущем предполагается такое распределение недельного числа часов на специальные предметы.

Семестры	I	2	3	4
Алгебра и анализ	7	5	6	2
Геометрия	4	3	-	4
Физика	7	6	6	6
Занятия по выбору	-	4	6	6
Всего	I8	I8	I8	I8

В начале второго семестра две недели / 7-2I февраля/ отводятся на производственную практику / математический и физический практикум и занятия по дополнительным, не входящим в экзаменационную программу, темам типа "летних математических школ"/. В десятом классе в конце первого семестра отводится около десяти дней на подготовку к экзаменам по анализу и геометрии, в июне происходят остальные выпускные экзамены.

Предполагается, что в I966 году кроме нормального приема в девятые классы будет проводится ограниченный по численности прием окончивших девятые классы на одногодичный курс.

П Р О Г Р А М М А

экзамена по алгебре для IO-х классов

I. Множества и отображения. n^m отображений множества из m элементов в множество из n элементов. Взаимно однозначные отображения. $n!$ взаимно однозначных отображений /подстановок/ множества из n элементов на себя.

2. Подмножества. C_n^m подмножеств из m элементов в множестве из n элементов.

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n; \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

3. Упорядоченные множества. $n!$ способов упорядочить /перестановок/ множества из n элементов.

4. Группы преобразований. Абстрактные группы. Примеры коммутативных и некоммутативных групп.

5. Системы направленных скалярных величин как специальный случай упорядоченных групп. Примеры. Аксиоматическое определение.

6. Измерение. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби / со включением всего обычного школьного материала/.

7. Аддитивные операторы в группах. Кольца операторов. Абстрактные кольца. Идеалы и кольца вычетов. Поля.

8. Делимость в кольце целых чисел. Единственность разложения на простые множители. Поля вычетов по простому модулю. Применение к решению неопределенных уравнений.

9. Действительные числа как операторы в системе скалярных величин.

IO. Векторное пространство. Базис. Теорема о равенстве числа элементов во всех базисах доказывается лишь при $n \leq 3$. Координаты.

II. Скалярное произведение. Расстояние и неравенство треугольника.

Пп. I2-I4 лишь для двумерного и трехмерного случая.

I2. Определители, миноры, алгебраические дополнения, обратная матрица.

I3. Геометрическая интерпретация. Связь со скалярным, векторным и смешанным произведением и теорией площадей и объемов.

I4. Ориентация. Линейные преобразования, сохраняющие и меняющие ориентацию.

Замечание. Система направленных величин п.5 есть не что иное, как ориентированное одномерное векторное пространство.

I5. Вращения на плоскости. Комплексные числа в алгебраической форме и четыре действия над ними. Сопряженные числа. Модуль.

I6. Понятие о векторном пространстве над полем комплексных чисел. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

I7. Аффинная классификация линейных операторов в действительном двумерном случае. Понятие о преобразовании "пространства-времени" в классической и релятивистской физике.

I8. Кольцо многочленов. Разложение многочлена на линейные множители над полем комплексных чисел и на квадратичные над полем действительных чисел.

I9. Системы линейных уравнений. Подробное исследование всех возможных случаев в случае двух неизвестных. Геометрическая интерпретация в двумерном и трехмерном случае. Вычислительная схема метода исключения при любом числе неизвестных.

20. Линейные неравенства и системы неравенств. Множество решений всегда выпукло. Перечисление всех выпуклых множеств на прямой.

Пункты II,I-4,I-8 программы для поступающих в ВУЗ. Разделы IУ и У этой программы у нас входят в курс анализа.

В п. I8 нашей программы можно ссылаться на теорему о существовании корня, которая доказывается в анализе.

П Р О Г Р А М М А

экзамена по анализу для IO - х классов

I. Точечные множества на прямой и на плоскости. Точка прикосновения, предельная точка, замкнутые множества.
Для линейных множеств: верхняя и нижняя грань, теорема о существовании верхней грани у ограниченных сверху множеств.
Связные множества. Связность любого выпуклого множества.

2. Непрерывные функции. Непрерывная на ограниченном замкнутом множестве функция ограничена на этом множестве и достигает своей верхней и нижней грани.
Непрерывные функции / действительные и комплексные, одного или двух действительных переменных, комплексного переменного/. Непрерывность суммы, произведения, частного, функции от функции.

3. Для действительных функций: а/ функция непрерывная на ограниченном замкнутом множестве ограничена на этом множестве и достигает своей верхней и нижней грани;
б/ функция непрерывная на связном множестве принимает на этом множестве вместе с двумя значениями $f(x_1)=a; f(x_2)=b$ и любое промежуточное значение η $a<\eta<b$.
Равномерная непрерывность. Функция, непрерывная в каждой точке ограниченного замкнутого множества, равномерно непрерывна на этом множестве.

4. Монотонные функции. Обратная функция. Непрерывность обратной функции.

5. Последовательности / действительных, или комплексных чисел, точек плоскости/. Предел последовательности. Элементарные теоремы о пределах числовых последовательностей. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности. Критерий Коши.

6. Понятие о сумме бесконечного ряда. Сумма бесконечной геометрической прогрессии.

7. Функция $Exp\, z$ для комплексного z , ее свойства. Число e .

8. Натуральный логарифм, как функция обратная к $Exp(x)$ Показательная функция

$$a^x = Exp(\ln a \cdot x)$$

и ее свойства.

9. Определение a^x через последовательное обобщение понятия степени

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

и т.д.

10. Поведение степенной функции x^α при различных показателях α.

11. Логарифмическая функция $\lg_a x$ и ее свойства. Десятичные логарифмы, характеристика и мантисса, пользование таблицами.

12. Предел функции при $x \to a$. Предел суммы, произведения, частного, функции от функции. Теорема о промежуточной переменной.

13. Производная. Производная суммы, произведения, частного, функции от функции, обратной функции.

14. Применение производных к исследованию поведения функций. Возрастание, убывание, максимумы, минимумы, выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

15. Теорема Ролля. Формула конечных приращений.

16. Первообразная. Две первообразные могут отличаться только на константу.

17. Определенный интеграл как ориентированная площадь между дугой графика и осью абсцисс и как предел суммы.

18. Теорема об интегрируемости произвольной непрерывной функции.

19. Натуральный логарифм как $\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x}$.

Замечание: Таким образом, мы познакомились с тремя способами введения функций a^x и $\lg_a x$.

1/ отправляясь от последовательного обобщения понятия степени,

2/ отправляясь от определения $Exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

3/ отправляясь от рассмотрения интеграла $\ln x = \int_1^x dx/x$.

20. Формула Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

График и свойства функций

$\sin x$; $\cos x$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

21. Формулы приведения и формулы сложения для e^{ix}, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

21-х Теорема о существовании у периодической непрерывной функции наименьшего положительного периода.

22. Таблица производных элементарных функций.

23. $\int x^{\alpha} dx$; $\int e^{kx} dx$; $\int \sin(ax+b) dx$; $\int \cos(ax+b) dx$.

Более полный набор правил интегрирования к экзамену готовить не надо. Но необходимо прорешать некоторое количество задач.

24. Формула интегрирования по частям.

25. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и в форме Коши. Разложение в степенные ряды элементарных функций.

26. Дифференциал функции одного переменного.
Метод Ньютона для приближенного решения уравнений.

27. Частные производные и дифференциал функции двух переменных.

27-х. Существование дифференциала в случае непрерывности частных производных.

28. Второй дифференциал функции двух переменных. Максимумы, минимумы, минимаксы.

Для 28 - тема из алгебры 28 а: квадратичные формы от двух переменных.

29. Дифференцирование комплексных функций комплексного переменного. Понятие о конформном отображении.

30. Формула Тейлора для многочленов и теорема о существовании корня алгебраического уравнения.

ПРЕПОДАВАТЕЛИ МАТЕМАТИКИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ-ИНТЕРНАТА № I8.

Руководитель потока 9-х классов Сосинский Алексей Брониславович (ассистент МГУ).
Руководители групп: Журбенко Н.И. (МГУ, 5 курс)
Козлов М.В. (МГУ, 6 курс)
Мищенко А.С. (МГУ, асп.)
Кауфман В.М. (МГУ, асп.)
Гордеев Д.И. (младший научн.сотр. МГУ)
Родман Н.Н. (МГУ, сотрудник МГУ)
Гайдуков Е.В.(МГУ, асп.)
Кузьмич К.К. (МГУ, 6 курс)

Руководитель потока I0-х классов Колмогоров Андрей Николаевич (академик ,профессор МГУ)
Руководители групп: Шершевский А.А. (учитель)
Ильяшенко Ю.С. (МГУ, 6 курс)
Харькова Н.В. (МГУ, 6 курс)
Кимельфельд Б.Н.(МГУ, 6 курс)
Чирка Е.М. (МГУ, 6 курс)

Руководитель потока II-х классов старого приема Алексеев Владимир Михайлович (доцент МГУ)
Руководители групп: Степин А.М. (МГУ, 6 курс)
Магретова Н.Н. (МГУ, 6 курс)
Ломоносов В.И. (2 курс)

Руководитель потока II-х классов нового приема Егоров Андрей Александрович (ассистент МГУ)
Руководители групп : Левин А.Л., (МГУ, 5 курс)
Переходцева Э.В. (МГУ, 6 курс)
Телетова Е.А. (МГУ,6 курс)
Куперман В. (МГУ,6 курс)
Радкевич Е.М. (МГУ, 6 курс)
Зайцев А.А. (МГУ, 3 курс)

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Ю.И.Манин

§ I. Определение.

Не все уравнения вида $f(x)=0$, где $f(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, имеют вещественные решения. Простейший пример: $x^2+1=0$. Комплексные числа – это элементы поля, содержащего поле вещественных чисел R и такой элемент i, что $i^2+1=0$.

Формальное определение. а/ Комплексное число есть выражение вида $a+bi$, где a, b – любые вещественные числа.

б/ Сумма двух комплексных чисел определяется формулой:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

в/ Произведение двух комплексных чисел определяется формулой:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Теорема I. Множество C всех комплексных чисел относительно определенных выше правил действий образует поле / определение поля см. в лекциях Винберга/.

Замечания. I. Нулевой элемент поля C есть $0+i\cdot 0$: мы будем обозначать его просто 0.

2. Единица поля C – это число $1+0\cdot i$: мы будем обозначать ее просто I.

3. Аналогично, мы будем писать a вместо $a+0\cdot i$ и bi вместо $0+b\cdot i$.

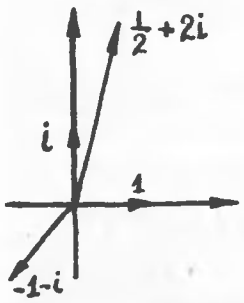
4. Комплексные числа $a+0\cdot i$ находятся во взаимно однозначном соответствии с вещественными числами a. Правила действий над ними / как над комплексными и как над вещественными числами/ согласованы. Поэтому мы будем считать, что $R\subset C$ – поле вещественных чисел является подполем поля комплексных чисел.

Определение. Пусть $\alpha=a+bi$. Число $\bar{\alpha}=a-bi$ называется / комплексно/ сопряженным к числу α.

Лемма. $\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$; $\overline{(\alpha\beta)}=\bar{\alpha}\bar{\beta}$.

§ 2. Геометрическая интерпретация.

Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат и поставим в соответствие каждому комплексному числу вида $a+bi$ вектор на плоскости с началом в начале координат, а концом в точке (a, b). Соответствие между такими векторами и комплексными числами взаимнооднозначно. Мы будем поэтому отождествлять эти вектора с комплексными числами. Вектора можно складывать и перемножать как комплексные числа.



Теорема 2. I/ Сложение комплексных чисел совпадает с обычным сложением векторов.

2/ Произведение двух векторов α, β есть третий вектор γ, длина которого равна произведению длины векторов α, β, а угол / против часовой стрелки/, образованный положительным направлением оси абсцисс и γ, равен сумме аналогичных углов для α и β.

Определение. Длина вектора α называется модулем комплексного числа α / обозначение $|\alpha|$ /.

Определение. Угол / против часовой стрелки/, образованный положительным направлением оси абсцисс и ненулевым вектором α, называется аргументом числа α / обозначение $\arg\alpha$ /.

Определение. Первая координата вектора α называется вещественной частью числа α / обозначение $Re\,\alpha$ /. Вторая координата называется мнимой частью / обозначение $Im\,\alpha$ /.

Значение поля комплексных чисел для алгебры и анализа во многом определяется следующей теоремой, которую мы здесь не будем доказывать: любой многочлен от одной переменной с комплексными / в частности, вещественными/ коэффициентами имеет комплексный корень.

Пример I. Разрешимость квадратных уравнений.

Пример 2. Корни любой степени из единицы.

Пример 3. Корни любой степени из комплексного числа.

§ 3. Тригонометрическая форма комплексного числа и логарифмы.

Теорема 3. Пусть α - комплексное число, $|\alpha|=r$, $\arg\alpha=\varphi$. Тогда

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

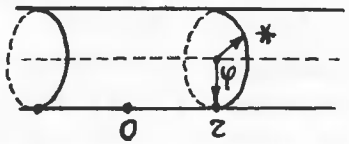
Следствие. /формула Моавра/:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Разумно определять $\arg\alpha$ только с точностью до слагаемых вида $2\pi k$, где k - целое число. Действительно, если нормировать $\arg\alpha$, скажем, условием $0\le\arg\alpha<2\pi$, то простая формула $\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta$ окажется неверной. Будем условно писать

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{2\pi i}$$

если $\alpha_1-\alpha_2$ имеет вид $2\pi i k$, где k - целое число. Такие "классы вычетов" комплексных чисел по модулю $2\pi i$ можно складывать / но не умножать!/. Их удобно изображать точками цилиндра: по одной образующей откладывается вещественная часть, а по окружностям - сечениям - углы.



* -это класс числа $r+i\varphi \pmod{2\pi i}$

Определение. Пусть α - комплексное число. Его натуральным логарифмом называется точка цилиндра / или класс комплексных чисел $\pmod{2\pi i}$/, определенная формулой:

$$\operatorname{Log}\alpha = \ln|\alpha| + i\arg\alpha \pmod{2\pi i}.$$

Основные свойства логарифма:

$$\operatorname{Log}(\alpha\beta) = \operatorname{Log}\alpha + \operatorname{Log}\beta$$

$$\operatorname{Log}\alpha = 0 \iff \alpha = 1$$

§ 4. Арифметика комплексных чисел. / общие сведения/.

Определение. Целым комплексным/гауссовым/ числом называется всякое число вида $a+bi$, где a, b - обычные целые числа.

Определение. Рациональным комплексным /гауссовым/числом называется всякое число вида $a+bi$, где a, b -обычные рациональные числа.

Теорема 4. Целые гауссовы числа образуют кольцо. Рациональные гауссовы числа образуют поле.

Определение. Пусть a, b - целые гауссовы числа. Мы говорим, что a делится на b, или что b является делителем a / обозначение: $a \equiv 0 \bmod b$, если существует такое целое гауссово число c, что $a = bc$.

Теорема 5. Если $a \equiv 0 \bmod b$, то $|a| \equiv 0 \bmod |b|$.

Следствие. Все делители единицы исчерпываются числами $\pm 1, \pm i$.

Определение. Целые числа α и $\varepsilon\alpha$, где ε -делитель I, называются ассоциированными.

Теорема 6. / деление с остатком/. Для любых целых гауссовых чисел α, β, $\beta \neq 0$, существует такое целое гауссово число γ, что

$$|\alpha - \beta\gamma| < |\beta|$$

Теорема 7. I/ Наибольший общий делитель δ любых двух целых гауссовых чисел существует и определяется однозначно с точностью до умножения на делитель единицы.

2/ $\delta = \alpha\xi + \beta\eta$, где ξ, η - некоторые целые гауссовы числа.

Следствие. Если $\alpha\beta \equiv 0 \bmod \gamma$, а $(\alpha, \gamma) = 1$, то $\beta \equiv 0 \bmod \gamma$.

Определение. Целое гауссово число α называется простым, если все его делители имеют вид ε или $\varepsilon\alpha$, где ε - делитель единицы.

Теорема 8. Всякое целое гауссово число разлагается в произведение простых гауссовых чисел однозначно с точностью до перестановки сомножителей или замены каждого из

них ассициированным.

Теорема 9. Число различных классов вычетов $\mathrm{mod}\,\alpha$ равно $|\alpha|^2$ для любого целого гауссова числа α.

§ 5. Простые гауссовы числа и суммы двух квадратов.

Теорема 10. Простое рациональное число $p>0$ является простым гауссовым числом в том и только том случае, когда $p\equiv 3 \bmod 4$.

Теорема 11. I/ $2=-i(1+i)^2$, где $1+i$ - простое гауссово число.

2/ Для любого простого рационального числа $p>0$ вида $4k+1$ существует такое простое гауссово число π, что $\pi\bar{\pi}=p$. / В силу теоремы 7 π можно выбрать не более чем восемью способами: π можно заменить на $\varepsilon\pi$ или $\varepsilon\bar{\pi}$, где ε - любой делитель I/.

Теорема 12. Число $N(a)$ решений уравнения $a=x^2+y^2$ где a, x, y - обычные целые числа, равно числу решений уравнения $a=|\xi|$, где ξ - целое гауссово число, и вычисляется так. Пусть $a=2\prod p_i^{b_i}\prod q_j^{c_j}$, где $p_i\equiv 1 \bmod 4$, $q_j\equiv 3 \bmod 4$. Тогда

$$N(a)=\begin{cases} 0, & \text{если } c_j\equiv 1 \bmod 2 \text{ для некоторого } j. \\ 4\prod(b_i+1), & \text{если } c_j\equiv 0 \bmod 2 \text{ для всех } j. \end{cases}$$

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ " ПРЕДЕЛЫ "
ДЛЯ 9-х КЛАССОВ

Э.Б.ВИНБЕРГ

I. Доказать, что $(1+\frac{1}{n})^n > (1-\frac{1}{2n})e$.

2. Доказать, что

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1!}{3!!}+\frac{2!}{5!!}+\frac{3!}{7!!}+\dots\right).$$

3. Пусть $a, b \geqslant 0$. Доказать, что $\lim\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ существует, и найти его.

4. На гранях октаэдра пишутся числа $a_1, a_2, \dots, a_8$. Затем каждое из них заменяется на среднее арифметическое чисел, написанных на соседних гранях (т.е. гранях, имеющих с данной гранью общую сторону). Это повторяется бесконечное число раз. При каких условиях будет существовать предел для числа, написанного на данной грани, и чему он будет равен?

5. То же самое, что в задаче 4, для додекаэдра.

6. Пусть $\{a_n\}$ - ограниченная последовательность, не имеющая предела. Доказать, что если существует такая последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, что $\lim \varepsilon_n = 0$ и $a_{n+1} \geqslant a_n - \varepsilon_n$ при всех n, то множество предельных точек последовательности $\{a_n\}$ представляет собой отрезок (включая концы).

7. Дано, что $0 \leq a_n \leq 1$ и $a_{mn} = a_m + a_n$, если m и n взаимно просты. Должен ли существовать $\lim \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$?

8. Пусть $\{a_n\}$ - неограниченная возрастающая последовательность. Обозначим через $r(n)$ число членов этой последовательности, не превосходящих n. Доказать, что если существует один из пределов $\lim \frac{r(n)}{n}$ и $\lim \frac{n}{a_n}$, то существует и другой, и они равны.

9. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и обладает тем свойством, что $f(x+y)=f(x)f(y)$ при любых x, y. Существует такое число $u>0$, что $f(x)<2$ при $|x|<u$. Доказать, что $f(x)=a^x$ при некотором $a>0$.

10. Пусть $\{a_n\}$ – убывающая последовательность положительных чисел. Доказать, что ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\ldots .$$

С помощью этой теоремы найти все значения α, при которых сходится ряд

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

11. Ряд с общим членом $a_n \geqslant 0$ расходится. Будут ли сходиться ряды с общим членом $\frac{a_n}{1+a_n}$, $\frac{a_n}{1+na_n}$, $\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ и $\frac{a_n}{1+a_n^2}$ соответственно?

12. Ряд с общим членом $a_n \geqslant 0$ расходится. Известно, что $a_n \to 0$. Доказать, что, какова бы ни была неограниченная возрастающая последовательность положительных чисел ρ_n, можно так переставить члены ряда, чтобы n – тая частичная сумма не превосходила ρ_n.

13. Ряд с общим членом a_n сходится. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{na_n}{1+n^2a_n^2}\right\}$ имеет неотрицательную предельную точку.

14. Найти все наборы чисел $\{A, a, b, c, d\}$, для которых последовательность $\{x_n\}$, определенная равенствами

$$x_1=A,\ x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d},$$

имеет предел.

I5. Последовательность $\{x_n\}$ определяется равенствами

$$x_1=a,\ x_{n+1}=(3-\tfrac{1}{n})x_n^2-(2-\tfrac{1}{n})x_n^3.$$

Доказать, что существует такое число a_0, заключенное между 0 и I, что

$$\lim x_n=\begin{cases}0, & \text{если } 0\le a<a_0,\\ 1/2, & \text{если } a=a_0,\\ 1, & \text{если } a_0<a\le 1.\end{cases}$$

ВЕЧЕРНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Группы для 9-11 классов

Группа 9-х классов.Руководители: Борис Писаревский (МГУ, 4 курс);Борис Пицкель (МГУ,4 курс).Занятия по средам с 17 час.30 мин. до 20 час. в помещении школы № 2.

Группа 10-11-х классов.Руководители: Людмила Арманович (МГУ,2 курс),Леонид Кириевский (МГУ,3 курс),Алексей Толпыго (МГУ,3 курс).Занятия по понедельникам с 18 до 20 час. в ауд.472 химического факультета МГУ.

Ответственный за подбор конкурсных задач – А.Толпыго.Председатель жюри конкурса – Сергей Овчинников (асп. МГУ).

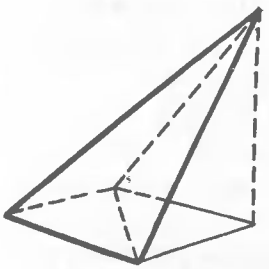
Тема 2. Площади и объемы / продолжение/.

Замечание об интегральной формуле для вычисления объемов.

В § 5 была выведена формула, выражающая n -мерный объем тела A через $n-1$ - мерные объемы его сечений семейством гиперплоскостей:

$$v(n)=\int_a^b v(t)\,dt. \qquad /I/$$

При выводе этой формулы мы считали, что выполнено условие " монотонности сечений" или по меньшей мере, весь интервал интегрирования распадается на конечное число интервалов, для которых выполнено это условие. Однако,уже в случае симплекса условие "монотонности" выполняется не всегда. Для того, чтобы обосновать выводы § 6, можно, например, представить такой симплекс в виде разности двух пирамид, для каждой из которых условие "монотонности" выполняется.



В действительности, формула /I/ справедлива для всех измеримых множеств / теорема Фубини/. Однако, доказательство этой общей теоремы требует гораздо более сложных средств.

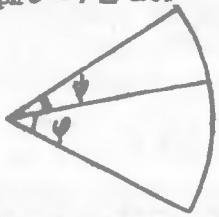
§ 9. Вычисление площади в полярных координатах.

Назовем криволинейным сектором множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$\alpha\le\varphi\le\beta\ ;\ 0\le r\le r(\varphi)$$

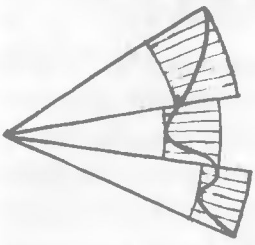
/ $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$; $r(\varphi)$- непрерывная функция на отрезке $[\alpha,\beta]$ /. При $r(\varphi)=r=const$ имеем круговой сектор. Из принципа инвариантности вытекает, что площадь кругового сектора является функцией от его радиуса r и угла φ . Из соображений подобия/см.§3/ следует, что эта функция удовлетворяет соотношению $F(r,\varphi)=r^2F(\varphi)$, где $F(\varphi)=F(1,\varphi)$. Из принципов аддитивности и инвариантности имеем функциональное уравнение $F(\varphi+\psi)=F(\varphi)+F(\psi)$. Поскольку $0\le F(\varphi)\le F(2\pi)$

при $0 \le \varphi \le 2\pi$, то $F(\varphi) = C\varphi$. Подставляя сюда $\varphi = 2\pi$ и замечая, что $F(2\pi)$ представляет собой площадь единичного круга, имеем $\pi = C \cdot 2\pi$ и, следовательно, $C = 1/2$, $F(\varphi) = 1/2\,\varphi$.



Итак, площадь кругового сектора с радиусом r и углом φ равна $1/2\, r^2 \varphi$.

Чтобы вычислить площадь криволинейного сектора A , рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Обозначим через r_i и R_i , соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $r(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Заметим, что $s = 1/2 \sum_{i=1}^{n} r_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1})$ представляет собой площадь содержащейся в A фигуры, составленной из круговых секторов / рис. 3 /. Аналогично,



$$S = 1/2 \sum_{i=1}^{n} R_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}) -$$

площадь фигуры, составленной из круговых секторов и содержащей А. По принципу монотонности выполнены неравенства $s \le$ площадь $A \le S$. Но s и S , соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла

$$J = 1/2 \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi \qquad /2/$$

Следовательно, площадь криволинейного сектора А выражается интегралом /2/.

§ 10. Площадь, заметаемая радиусом - вектором точки.

Пусть точка движется по плоскости и пусть ее координаты в момент t равны $x(t), y(t)$. Предположим, что при изменении t от t_1 до t_2 полярный угол все время возрастает. Иначе говоря, радиус - вектор поворачивается все время против часовой стрелки. Пусть α и β значения полярного угла, соответствующие t_1 и t_2 . Тогда фи-

гура, заметенная радиусом-вектором, является криволинейным сектором, и ее площадь может быть вычислена по формуле /2/. Обозначим через $u(\varphi)$ первообразную функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ и вычислим производную этой функции по t. Пользуясь тем, что $tg\varphi = y/x$, имеем

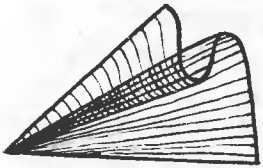
$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot d\varphi/dt = \frac{1}{x^2}\left[x\,dy/dt - y\,dx/dt\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{du}{dt} = u'(\varphi)\varphi'(t) = \frac{1}{2}r^2(\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{x^2}\left[x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right] = \frac{1}{2}\left[x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right]$$

Поэтому площадь, заметаемая радиусом-вектором, когда t меняется от t_1 до t_2, равна

$$J = u(\beta) - u(\alpha) = u[\varphi(t_2)] - u[\varphi(t_1)] = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right]dt \qquad /3/$$



Если в течение времени $[t_1, t_2]$ радиус-вектор вращается по часовой стрелке, то $\varphi'(t) \le 0$ и формула /2/ и /3/ приводят к отрицательному значению для заметаемой площади. В общем случае интеграл

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt \qquad /4/$$

выражает алгебраическую сумму площадей, в которой с положительным знаком учитываются площади, заметаемые при вращении против часовой стрелки, и с отрицательным знаком площади, заметаемые по часовой стрелке.

§ II. Гладкая дуга. Касательный вектор.

Пусть каждому t из отрезка $[a, b]$ сопоставлена точка $f(t)$ на плоскости или в пространстве. Если функция $f(t)$ непрерывна, то она определяет дугу кривой. Если функция $f(t)$ имеет непрерывную производную, то дуга называется гладкой.

Что такое производная $f(t)$? Будем рассматривать $f(t)$ как вектор. Тогда имеет смысл выражение $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$. Если существует предел этого отношения при $h \to 0$, то он называется производной и обозначается $f'(t)$. Если $x(t)$,

$y(t), z(t)$ - координаты вектора $f(t)$ в какой-нибудь декартовой системе координат, то $f'(t)=(x'(t), y'(t), z'(t))$.

Вектор $f'(t)$ называется касательным вектором к параметризованной кривой $f(t)$. Он направлен по касательной к кривой, а его длина зависит от выбора параметра t. Если $f(t)$ - положение частицы в момент t, то $f'(t)$ - скорость движения.

Примеры: а/ Прямая $f(t)=f_0+f_1 t$ / f_0 и f_1 -постоянные векторы, причем $f_1 \neq 0$ /.

б/ Окружность: $x=R\cos t, y=R\sin t$.

в/ Винтовая линия: $x=R\cos t, y=R\sin t, z=ht$

г/ Однородная кривая в четырехмерном пространстве /см. задачу 22/.

§ 12. Длина дуги.

Пусть $f(t)\ (a\le t\le b)$ - некоторая кривая. Рассмотрим произвольное разбиение $T=\{a=t_0<t_1<\dots<t_n=b\}$ отрезка $[a, b]$. Соединив отрезками последовательно точки $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)$, получим ломаную, вписанную в данную дугу кривой. Длина этой ломаной дается формулой

$$\ell(T)=\sum_{i=1}^{n} |f(t_i)-f(t_{i-1})|.$$

Определение. Если $\ell(T)\to S$ при $\|T\|\to 0$, то дуга называется спрямляемой, а число S называется его длиной.*/

§ 13. Теорема о длине дуги гладкой кривой.

Теорема. Гладкая дуга $f(t)\ (a\le t\le b)$ спрямляема, и ее длина равна

$$\int_a^b |f'(t)|\,dt=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt \qquad /5/$$

Доказательство. Пусть $T=\{a<t_0<\dots<t_n=b\}$. Рассмотрим суммы

$$\ell(T)=\sum_{i=1}^{n} |f(t_i)-f(t_{i-1})|,\quad q(T)=\sum_{i=1}^{n} |f'(t_{i-1})|(t_i-t_{i-1}).$$

*/ через $\|T\|$ обозначается максимум разностей t_i-t_{i-1} $(i=1, 2, \dots, n)$.

При $\|T\| \to 0$ $q(t) \to \int_a^b |f'(t)|dt$. Поэтому достаточно показать, что

$$|\ell(T) - q(T)| \to 0. \qquad /6/$$

Функции $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ непрерывны, следовательно, равномерно непрерывны на отрезке $[a, b]$. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при $|\beta - \alpha| < \delta$

$$|x'(\beta) - x'(\alpha)| < \varepsilon, \; |y'(\beta) - y'(\alpha)| < \varepsilon, \; |z'(\beta) - z'(\alpha)| < \varepsilon.$$

По теореме Лагранжа

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tilde{t}_i)(t_i - t_{i-1}) = x'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + u_i,$$

где $t_{i-1} \le \tilde{t}_i \le t_i$ и $u_i = [x'(t_{i-1}) - x'(\tilde{t}_i)](t_i - t_{i-1})$.

Очевидно, $|u_i| \le \varepsilon (t_i - t_{i-1})$.

Аналогично,

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + v_i,$$

$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + w_i,$$

где $|v_i|$ и $|w_i|$ меньше $\varepsilon (t_i - t_{i-1})$. Значит,

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + \tau_i, \qquad /7/$$

где $\tau_i = (u_i, v_i, w_i)$ и $|\tau_i| = \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2} \le 2\varepsilon (t_i - t_{i-1})$.
В силу /7/ $|\ell(T) - q(T)| \le 2\varepsilon (b - a)$, что и доказывает /6/.

Следствия. I. Если дуга задается уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, то ее длина равна

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \qquad /8/$$

2. Если дуга задается в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, то ее длина равна

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}\, d\varphi. \qquad /9/$$

§ 14. Длина дуги окружности.

Для окружности радиуса R $r(\varphi) = R$ из формулы /9/ имеем

$$S = \int_\alpha^\beta R\, d\varphi = R(\beta - \alpha).$$

Стало быть, длина дуги окружности равна произведению радиу-

са окружности на соответствующий центральный угол. В частности окружность радиуса R имеет длину $2\pi R$.

§ 15. Канонический параметр на кривой.

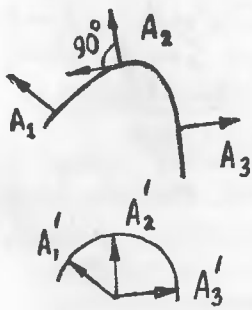
Рассмотрим гладкую кривую $f(t)$ и положим

$$s=\int_{t_0}^{t}|f'(t)|dt. \qquad /10/$$

Иначе говоря, $s=s(t)$ – взятая со знаком плюс или минус длина дуги с концами $f(t_0)$ и $f(t_1)$ / знаки одинаковы для точек кривой, расположенных по одну сторону от $f(t_0)$ /. Значение s однозначно определяет положение точки на кривой и может быть принято в качестве параметра на кривой. Этот параметр называется каноническим. Из /10/ вытекает, что $\frac{ds}{dt}=|f'(t)|$. Отсюда $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ и $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$. Иначе говоря, $\left|\frac{ds}{ds}\right|=1$. С точки зрения физика это означает, что если при криволинейном движении длина проходимого пути равна соответствующему промежутку времени, то скорость по абсолютной величине равна I.

Докажем, что для гладкой кривой длина дуги и длина стягивающей эту дугу хорды суть эквивалентные бесконечно малые. Действительно, $\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}{\Delta s}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2}\to\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}=1$

§ 16. Кривизна.

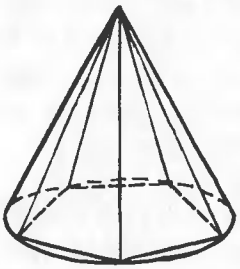


Рассмотрим в каждой точке гладкой дуги C единичный касательный вектор. Повернув его на 90° по часовой стрелке, получим вектор нормали. Отложим этот вектор из фиксированной точки. При этом получается отображение дуги C в единичную окружность. Его называют сферическим отображением. Отношение длины сферического изображения дуги C к длине самой дуги называется средней кривизной дуги. Предел этого отношения, когда дуга стягивается к некоторой своей точке A, называется кривизной кри-

вой в точке A. Из этого определения сразу видно, что кривизна прямой равна нулю, а кривизна окружности радиуса R всюду равна $1/R$. Докажите сами, что кривизна дуги $y=f(x)$ выражается формулой

$$\frac{f''(x)}{[1+f'(x)^2]^{3/2}}.$$

§ 17. Боковая поверхность круглого конуса.



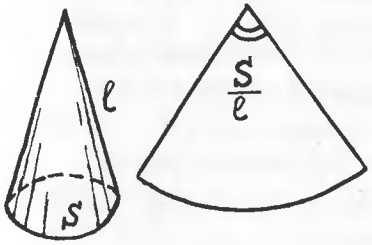
Общее определение площади гладкой поверхности слишком сложно. Поэтому мы ограничимся только некоторыми частными случаями. Боковая поверхность круглого конуса определяется как предел боковых поверхностей вписанных в конус пирамид. Боковыми гранями пирамиды являются треугольники. Обозначив через a_i основание и через h_i высоту i-ого треугольника, имеем для площади боковой поверхности выражение

$$S = 1/2 \sum a_i h_i .$$

Пусть ℓ длина образующей конуса и s длина окружности основания. Заметим, что

$$\frac{1}{2}\ell s - S = \frac{\ell}{2}(s - \sum a_i) + \frac{1}{2}\sum a_i(\ell - h_i). \qquad /II/$$

Когда наибольшее из чисел a_i стремится к нулю, то $h_i \to \ell$ и $\sum a_i \to s$. Поэтому из /II/ вытекает, что $S \to \frac{1}{2}\ell s$. Итак, боковая поверхность конуса равна половине произведения длины окружности основания на длину образующей.

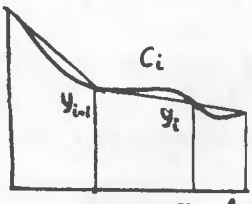


К этому результату можно придти и по другому. Разрежем поверхность конуса по одной из образующих и разогнем в кусок плоскости. Мы получим сектор радиуса ℓ, ограниченный дугой s. Соответствующий центральный угол равен s/ℓ, а площадь сектора равна $1/2\,\ell^2(\frac{s}{\ell}) = \frac{1}{2}\ell s$.

Ясно, что боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей верхнего и нижнего оснований на длину образующей.

§ 18. Площадь поверхности вращения.

Рассмотрим поверхность, образуемую при вращении вокруг оси абсцисс кривой C, заданной уравнением $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ */. Пусть $X=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ – какое-нибудь разбиение отрезка $[a,b]$. Рассмотрим ломанную с вершинами в точках (x_i,y_i), где $y_i=f(x_i)$. Поверхность, образуемая при вращении этой ломаной, состоит из усеченных конусов, и ее площадь равна $P(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\cdot 2\pi c_i$, где c_i – длина отрезка с концами (x_{i-1},y_{i-1}) и (x_i,y_i).



Предел этого выражения при $\|X\|\to 0$ назовем площадью поверхности вращения. Введем на кривой C канонический параметр S. Обозначим через S_i значение этого параметра, отвечающее точке (x_i,y_i). Заметим, что

$$P(X)=\frac{1}{2}[P_1(X)+P_2(X)]+R(X), \qquad /12/$$

где

$$P_1(X)=2\pi\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}(s_i-s_{i-1}),\quad P_2(X)=2\pi\sum_{i=1}^{n}y_i(s_i-s_{i-1}),$$
$$R(X)=\pi\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i)(c_i-s_i+s_{i-1}).$$

Имеем

$$|R(X)|\le 2\pi M(s''-s'-\sum_{i=1}^{n}c_i), \qquad /13/$$

где M – максимум $f(x)$ на отрезке $[a,b]$; $s'=s_0$, $s''=s_n$. При $\|X\|\to 0$ правая часть в формуле /13/ стремится к нулю и в силу /12/

$$\lim P(X)=\frac{1}{2}\lim P_1(X)+\frac{1}{2}\lim P_2(X).$$

*/ Мы считаем, что $f(x)$ всюду положительна.

Но $P_1(X)$ и $P_2(X)$ суть интегральные суммы для интеграла

$$2\pi \int_{s'}^{s''} y(s)\,ds. \qquad /14/$$

Следовательно, этот интеграл выражает площадь поверхности вращения. Переходя от канонического параметра s к произвольному параметру t, имеем для площади поверхности вращения выражение

$$2\pi \int_{t'}^{t''} y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt. \qquad /15/$$

§ 19. Площадь поверхности сферы.

Сфера радиуса R получается при вращении вокруг оси абсцисс полуокружности $x=R\cos t, y=R\sin t\ (0\le t\le\pi)$. Здесь s канонический параметр. Поэтому поверхность сферы равна

$$2\pi \int_0^{\pi} R^2 \sin t\,dt = -2\pi R^2 \cos t\Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

/см. начало в сборнике 3/.

I2. Пусть P и Q k - мерное и e - мерное подпространства евклидова пространства V, ортогональные друг к другу. Пусть $A \subset P, B \subset Q$ и пусть $A+B$ - совокупность всех векторов вида $x+y$, где $x \in A, y \in B$. Доказать, что

$$V_{k+e}(A+B) = V_k(A) V_e(B)$$

/Если A - отрезок, то $A+B$ - цилиндр с основанием B /

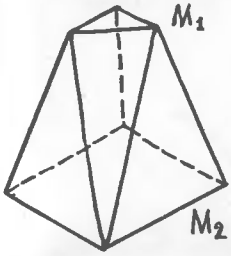
I3. Пусть площадь поперечного сечения некоторого тела задается формулой

$$v(t) = At^2 + Bt + C \quad (a \le t \le b)$$

В предположении, что применима интегральная формула /I/, доказать, что объем тела равен

$$\frac{b-a}{6}\left[v(a)+v(b)+4v\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

/ Формула Симпсона./



I4. Пусть в двух параллельных плоскостях расположены выпуклые многоугольники M_1 и M_2. Выпуклая оболочка множества их вершин называется призматоидом.

а/ Разбивая призматоид на конечное число пирамид и призм, доказать, что при определении его объема можно пользоваться формулой Симпсона.

б/ Пусть M_1 - прямоугольник со сторонами a, b, а M_2 - прямоугольник со сторонами a' и b', причем одноименные стороны параллельны /"обелиск"/. Найти объем этого тела, считая, что высота его равна h.

в/ Пусть M_2 - квадрат со стороной a, M_1 - отрезок длины b, параллельный диагонали квадрата. Считая, что высота призматоида равна h, найти его объем.

I5. У двух круговых цилиндров радиуса R оси симметрии пересекаются под прямым углом. Найти объем общей части этих цилиндров.

I6. Найти объем части параболоида вращения $z = a(x^2+y^2)$,

отсекаемой плоскостью $z=t$.

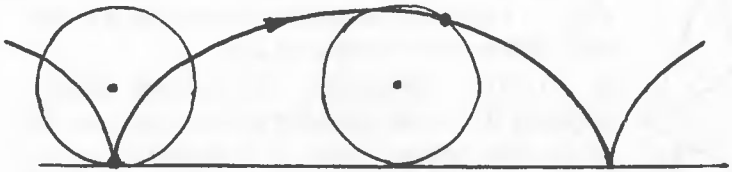
17. Лемниската задается в полярных координатах уравнением $r^2=a^2\cos 2\varphi$. Доказать, что :

а/ Лемниската является геометрическим местом точек, для которых произведение расстояний до некоторых двух точек постоянно.

б/ Если подвергнуть лемнискату инверсии в любой окружности с центром в точке самопересечения, то получится гипербола.

Найти площадь, ограниченную лемнискатой.

18. Пусть C - гладкая замкнутая самонепересекающаяся кривая. Предположим, что отрезок длины 2A скользит концами по кривой C так, что его середина описывает замкнутую кривую C' , а каждый из концов, обойдя всю кривую C , возвращается в первоначальное положение. Доказать, что площадь, заключенная между C и C' , равна πa^2 . /Если C' пересекает C , то части площади, расположенные вне C надо брать со знаком минус./



19. Циклоидой называется кривая, которая описывается точкой окружности, когда окружность катится без скольжения по прямой. Точки пересечения этой прямой и циклоиды разбивают циклоиду на дуги, которые называются арками.

а/ Написать параметрическое уравнение циклоиды.

б/ Найти площадь, ограниченную одной аркой и замыкающей ее хордой.

в/ Вычислить длину арки.

20. ε -окрестностью множества A называется геометрическое место точек, удаленных от A на расстояние, меньшее ε .

а/ Доказать, что ε - окрестность выпуклого многоугольни-

ка имеет площадь

$$\pi\varepsilon^2+p\varepsilon+S_0$$

где S_0 - площадь многоугольника и p - его периметр.

б/ Предельным переходом доказать, что та же формула сохраняется для выпуклых фигур, ограниченных гладкими кривыми.

21. Найти длину одного витка винтовой линии

$$x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=ht.$$

22. Рассмотрим в четырехмерном пространстве кривую, которая определяется в прямоугольных координатах формулами:

$$x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=R\cos\alpha t,\ u=R\sin\alpha t,$$

где R - положительная постоянная, α - иррациональное число.

а/ Найти множество всех предельных точек для этой кривой.

б/ Доказать, что эта кривая однородна, т.е. что любую ее точку можно перевести в любую другую ее точку движением, при котором кривая переходит в себя.

в/ Найти длину ее дуги, соответствующей отрезку $0\le t\le 2\pi$.

Подписано к печати 22/X1-65г. Л-49694. Формат 60x90/16
Физ.печ.л. 4,0. Усл.печ.л. 4,0. Уч.-изд.л. 3,25. Зак. 1530
Тираж 1000 экз. Цена 10 коп.

Издательство
Московского университета
Москва, Ленинские горы
Административный корпус
Типография Изд-ва МГУ.
Москва, Ленинские горы.